新装
復刊

パリティ物理学コース　牧 二郎・長岡洋介・大槻義彦 編

解析力学

並木美喜雄 著

丸善出版

新装
復刊

パリティ物理学コース　牧 二郎・長岡洋介・大槻義彦 編

解析力学

並木美喜雄 著

丸善出版

本書は，1991年に発行したものを，新装復刊したものです．

パリティ物理学コース

発刊にあたって

物理学という学問は，近代科学の柱として古い歴史をもちながら，とりわけガリレオやニュートンによる力学の建設をはじめ，光学・熱学・電磁気学など多くの分野で長足の発展を遂げ，自然科学の中で欠くことできない大きな構成部分を占めています．特に 20 世紀に入ってからは，相対性理論や量子力学といった斬新な理論が打ち立てられてその魅力が倍増したのみならず，極微の世界から大宇宙に及ぶ人類の認識能力を大きく拡げ，工学的応用によって多くの先端技術を切り拓くとともに，広く自然科学の他の分野にも深い影響を及ぼしています．専門的知識の最前線としての物理学を習得しようとする人々は近年ますます多くなってきていますが，それとともに，物理学は，その基本的な知識や方法が，かつてなかったほど広範囲な領域に普及されていく時代を迎えていると思われます．

このような状況の中で，本コースは，物理学を必要とする研究分野の多岐にわたる読者の要望に応える新しい構成と規模によって，物理学の広範な領域を多面的に学習することを可能にするコースです．本コースの柱となるテーマは，大学初年度から大学院教育にわたって必要なものを網羅し，力学や電磁気学といった基礎・教養の物理学から，高エネルギー物理学，核物理学，物性物理学，宇宙物理学その他に至るさまざまな分野の

ものが取り上げられています．また，それぞれのテーマについては，同一のテーマであっても性格の違う複数のものをそろえ，読者自身が選択できるようにした新しいタイプの構成をめざしています．

さらに，コースの柱を補うものとして，“クローズアップ”というサブテキスト・シリーズが用意されています．これは，現在脚光をあびている先端的な問題や，科学史的あるいは教育的見地からその必要性が認められる題材を随時補完するものであり，読物的色彩に富むシリーズです．

したがって，読者は，各テーマ毎に自分に適したものを選択し，かつ必要に応じて“クローズアップ”からサブテーマを選ぶことにより，イージーオーダー方式で，自分専用に，自分に最適のコースを用意することができます．

このような特徴を備えたこの新コースは，各分野で物理を学ぶ大勢の人達に受け入れられ，それぞれの分野の発展に寄与するものと確信いたします．

1990 年 2 月

牧　二郎

まえがき

力学は物理学の中でもっとも早く体系化された学問であり，解析力学はその理論体系の中核である．解析力学は力学の理論構造の内容吟味と理論形式の整備を行いながら発展してきた．直接の目標が力学現象の解析にあることは当然だが，その理論形式は力学以外の学問の定式化にも援用されるようになった．解析力学の理論体系はそれほど包括的だったからである．現在では，電磁気学，量子力学，一般相対性理論，さらに大統一理論を目指す場の量子論などもその理論形式を借りて定式化されている．解析力学は物理学理論体系の“手本”であるといってよい．また，古典力学から量子力学への飛躍が解析力学のハミルトン-ヤコビ理論を踏み台にして行われたという歴史的事実も忘れられない．将来も解析力学は物理学の原理的発展にかかわって行くことと思う．理論物理学を志す者にとって，解析力学は確かに不可欠の学問である．しかし，必要性ばかりではない．理論構成がまことに美しい．学習途上で解析力学の美しさに魅せられて理論物理学を志向した人が少なからずいたに違いない．

ここで学ぶ解析力学は“量子”力学ではないという意味では“古典”力学である．だが，“古典”力学を昔の学問と速断してはいけない．量子力学建設後も，解析力学は各時代の興味と内

容的な要求に応じて絶えず発展してきた学問だ．現代物理学の基礎理論の一つなのである．昔から力学の教科書には名著が多いが，それに飽きたらず，繰り返し新しい本が書かれてきた理由もそこにある．あえて言わせていただければ，私がこの本を書いた動機もそこにある．

筆者は長い間早稲田大学理工学部にあって，基礎教育から専門課程への橋渡しを目的にして，解析力学の入門的な講義を続けてきた．その講義ノートをベースにして，項目を補足したり再配列をして書いたのがこの本である．基本的には，この本は力学の初歩を学習して次の段階に進もうとする人たちのためのガイドブックである．そのため，偏微分計算の基礎的な技術さえ知っていれば読み進むことができるように配慮したつもりだ．しかし，力学の問題解説集を期待して読むとすれば，恐らくかなり違った印象をもたれるに違いない．運動の法則の内容吟味から始めて，理論体系を系統的に学習するところに重点がおかれているからである．学生諸君にとっては，力学は中学校・高等学校時代から何回か勉強してきたなじみ深い学問であり，具体的な問題の取扱いにはかなり慣れていると思う．しかし，抽象的思考を伴う理論体系の系統的な把握という学習スタイルは，恐らく初めての体験ではないか．その方面の学習がこの本の主な目的なのである．したがって，本文中の具体的例題も理論構成の理解に役にたつ簡単なものに限り，他は章末問題に移した．その章末問題も，半数以上は理論構成の理解を助ける目的で入れた．分量を抑えるためのやむを得ない措置でもあった．また，わかりやすさに重点をおいたため，数学的な厳密性はかなりの程度犠牲にした．初学者を意識して書いた教科書ではあるが，現代物理学にとって必要な解析力学の知識は一応この本だけの学習で済むように配慮したつもりである．

読み直しを重ねながら十分に検討して書いたが，なお著者の理解不足や不注意または勘違いによるミスを恐れている．皆さま方のご教示を得て，改善して行きたい．

この本は早稲田大学理工学部教授大槻義彦氏および丸善出版事業部桑原輝明氏の熱心なお勧めと粘り強い励ましによって完成した．また，早稲田大学理工学部教授大場一郎氏には原稿の一部を読んでいただき適切な助言を得た．改めてお礼申し上げる．

1991年7月

並木美喜雄

目　次

1　運動の基礎法則

1.1　モデルをつくろう

初等力学の演習問題はかなり整理された形で書かれている場合が多い．簡単な図などによる問題の提示を受けて運動方程式を設定し，ただちにそれを解く作業に入るわけである．例えば，太陽のまわりの地球の運動の場合（図 1.1），太陽と地球をそれぞれ質量 M，m の質点として表し，その間に万有引力，

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R} \tag{1.1}$$

が働くとして運動方程式を立てる．G は万有引力の定数，$\boldsymbol{R}$ は太陽から地球へ向かう距離ベクトル，$R=|\boldsymbol{R}|$ は距離である．しかし，複雑な構造物である太陽と地球を点にしてしまっ

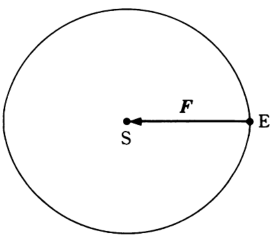


図 1.1　太陽（S）のまわりの地球（E）の運動

てよいのか？　両者間の力は式(1.1)だけか？　当然，このような疑問が起る．これらは一つのモデル（模型）である．私たちにとっての力学は，微分方程式の応用問題ではなく，自然界の現象を解明するための学問である．だが，具体的現象と紙の上に書く運動方程式との間は必ずしも近くない．その間の橋渡しをするのがモデルである．力学に限らず一般に物理学では，現象の解明に際して必ずモデルを使う．具体的な物理現象はどれも非常に複雑であるが，その本質を洗い出してゆけば，意外に簡単な形で理解される場合が多い．通常，一つの現象に注目したとき，まずあまり重要とは思われない付随的な現象を無視し，その現象の本質をうまくとらえた簡単化を行う．これがモデルの設定である．力学におけるモデルの設定には二つの作業が含まれる．第1は力学系をつくっている構成要素についての簡単化，第2はその構成要素間の力の簡単化である．もちろん，二つの作業は互いにまったく独立ではない．

太陽のまわりの地球の運動について考えよう．現実の自然界では，太陽系には太陽と地球ばかりでなく水星，金星，火星，木星，土星，‥‥などの惑星があるし，地球自身も衛星として月をもっている．さらに，太陽系は多数の恒星とともに銀河系宇宙の中にある．この銀河系も他の多数の銀河とともに大宇宙を形成している．これらすべての天体が互いに力を及ぼし合っているわけだから，具体的対象としての地球の運動はきわめて複雑である．しかし，太陽のまわりの地球の運動に着目している場合，他の天体の影響は「ひとまず」無視してもよかろう．これで太陽と地球だけになったが，モデル作りはまだまだ進む．太陽も地球も有限の広がりをもった構造物であり，内部ではいろいろな変化や運動がある．しかし，太陽地球間の距離は太陽と地球の直径に比べて非常に大きいので，両者の大きさや形状は（内部運動と合せて）「ひとまず」無視し，それぞれ全質量 M と m が各重心に集中した点のように扱うことが許される．この理想化の極限として，質量をもつ広がりのない物

体，すなわち，**質点**という概念に到達する．こうして，この力学系は図1.1のような2質点系でおき換えてよいことになった．これがモデル作りの第1段階である．

次の段階は2質点間の力の設定である．冒頭のモデルでは，2質点の万有引力(1.1)をおいた．これには若干の説明が必要かもしれない．太陽や地球に有限の広がりがあれば，それが両者間の距離に比べて小さくても，質量分布の不均一性などの影響で，式(1.1)以外に双極子型の力などが付け加わる（章末問題を見よ）．また，太陽と地球は帯電しているし，磁気能率もあるので，互いに電磁力を作用し合うだろう．しかし，これらはいずれも小さく，式(1.1)が圧倒的に大きい．地球が太陽のまわりの軌道から離れて飛び去らない主原因は式(1.1)にあって，他の力にはない．したがって，式(1.1)以外のすべての力を「ひとまず」無視することが許される．だが，式(1.1)を捨て去ることは許されない．式(1.1)を捨てれば，太陽のまわりの地球の運動は根底から破壊されるに違いない．このような考察を経て，私たちは冒頭に述べたモデルに到達したのである．なお，$M \gg m$ を考慮し，比（m/M）を無視すれば，質点 M（太陽）が力(1.1)の中心点に静止し，質点 m（地球）がそのまわりを運動するという1体問題型のモデルが許される．これ以上の簡単化は不可能だろう．

モデルが設定されて初めて運動方程式を紙の上に書くことができる．モデルが正しければ，その解は現実の運動をかなりよく再現してくれるだろう．しかし，いくつかの要因を無視し何回か簡単化を行った以上，当然のことながら，現実の運動はその解からずれる．自然現象の解明を進めるためには，次にその「ずれ」の原因を考えて，それに対するモデルをつくらなければならない．そのモデルも正しければ，補正された結果は前の解よりも現実の運動に近くなるはずだ．太陽のまわりの地球の運動についていえば，他の天体の影響を取り入れることである．それでも説明できない「ずれ」に対しては，さらに次の段

階のモデルの設定に進む．「ひとまず」無視してきた要因を段階的に取り込んでゆく作業でもある．これは物理学全般で広く行われている方法である．このアプローチを単なる近似解法だと速断してはいけない．本来，物理学は複雑な自然現象を少数の法則と要因の組合せで理解してゆこうとする学問であった．いま述べたやり方はまさにその実践であり，自然現象の機構を解明してゆくための解析手段なのである．たとえ超高性能のコンピュータが実現したとしても，この進め方は変らない．

モデル作りでは，いくつかの要因を「ひとまず」無視したが，その都度必ず量の比較が行われている．

別の例を考えよう．水素原子の構成要素は陽子1個と電子1個だから，太陽と地球の場合に似ている．同様の考察で，陽子と電子を（それぞれ質量 M，m と電荷 $+e$，$-e$ をもつ：e は素電荷）質点として扱うモデルに到達する．この場合，陽子・電子間力としてはまず万有引力(1.1)とクーロン型の静電力 $-(e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2)(\boldsymbol{R}/R)$ （ε_0 は真空の誘電率）が念頭に浮かぶだろう．しかし，今度は前と違い，圧倒的に大きな力は静電引力であって万有引力(1.1)ではない．大きさの比較によってただちにわかることだ．こうして，水素原子に対して図1.1とまったく同型のモデルが得られた．ただし，万有引力は静電引力でおき換えておかなければならない．

原子内の力学　現実の水素原子の内部構造を古典力学で語ることは不可能だ．陽子も電子も量子力学的粒子であり，原子内の現象には量子力学を適用する必要がある．これはモデルの問題ではなく，力学法則の責任である．この場合でも上記のモデルは正しい．モデル作りに関しては，対象の力学法則が古典力学であろうと量子力学であろうと，基本的筋道に変りはない．

もう少し，モデル作りの実例を見ておこう．地球のまわりの人工衛星の運動について考える．現在の人工衛星は地球に比べ

てきわめて小さいので，質点と見なすことができよう（質量は m とする）．だが，地球の半径は人工衛星の軌道半径に比べて無視できるほど小さくはないので，地球をその全質量 M が重心に集中した質点で代表させるわけにはゆかない．ゆえに，両者間の力として式(1.1)をおくことは妥当でない．式(1.1)は質点間の万有引力だからである．ではどうしたらよいか？　ここでも現象をより簡単なものの組に分解するという方針に従う．地球全体を十分小さい物体の集合体と考えるのである．各物体の大きさとしては，人工衛星からの距離に比べて十分小さくとっておけばよい．そのとき，各物体は質点と見なすことができ，各物体と人工衛星の間の力に対して式(1.1)型の万有引力を設定することが許される．したがって，人工衛星には地球の各部分物体からの万有引力のベクトル和が作用する．i 番目物体の質量を $m_i\,(i=1,2,\cdots\cdot,N)$，地球の重心Oから i 番目物体への距離ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$，人工衛星への距離ベクトルを $\boldsymbol{R}$ とすれば(図1.2)，地球全体が人工衛星に及ぼす力は，

$$\boldsymbol{F}=-\sum_{i=1}^{N}G\frac{mm_i}{R_i^2}\frac{\boldsymbol{R}_i}{R_i} \tag{1.2}$$

に等しい*)．ただし，$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_i$である．この場合，私たちは地球全体を（$N$ 個の）質点の集合体，すなわち，**質点系**と考えたわけである．このように，有限の広がりと複雑な形や質量（または電荷）分布をもつ物体の運動も，質点系と見なすこと

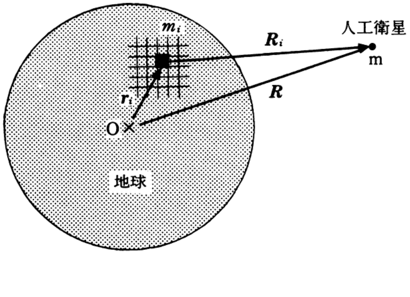


図1.2　地球と人工衛星

によって，基本的でしかも簡単な法則から理解できるようになった．なお，質点が連続的に分布している力学系を**連続体**という．

分割とはまったく逆の方向のモデル作りもある．例として，多数の電子をもつ原子の構造を考えよう．原子番号Zの原子は正電荷$+Ze$（eは素電荷）をもつ原子核とZ個の電子からできている．原子核質量に対する電子質量の比はきわめて小さいので，静止している原子核のまわりを電子が運動するというモデルが許される．しかし，それでもZ個の質点に対する多体問題を解かなければならない．これはたいそう難しい問題だ．このような場合には，しばしば，平均場中の1電子という近似モデルが採用される．一つの電子が受ける力は原子核からの引力と$Z-1$個の電子からの斥力であるが，後者を負電荷の雲と考えてならしてしまい，全体を一つの**平均場**で表そうとするものである．荒っぽい近似のように見えるが，これでも原子の性質をかなりの程度説明することができる．

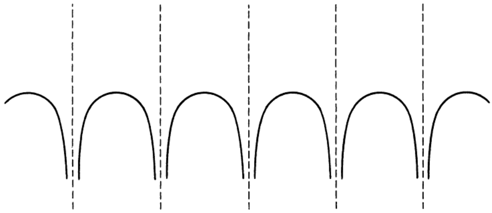


図1.3　結晶内電子の平均場

金属や半導体などの結晶内の電子に対しても，平均場中の1電子という近似モデルが広く用いられている．マクロの大きさの結晶はアボガドロ数（$\sim10^{24}$）ほどの結晶格子や電子をもっているから，多体問題としての規模は原子構造の場合をはるかに越える．この巨大な多体問題をそのまま解く仕事は神業以外

＊）　地球が完全な球体であり，質量分布も一様であれば，式（1.2）は式（1.1）に一致し（$M=\sum_i m_i$），2質点モデルが復活する．章末問題を見よ．

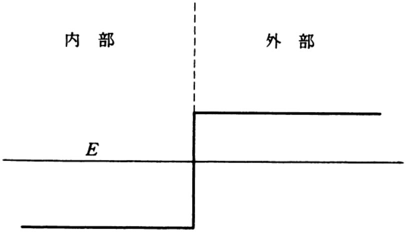


図 1.4　表面付近の平均場

の何物でもない．そこで，一つの電子に注目し，多数の電子をならして1体近似の平均場をつくる．結晶格子の規則正しい配置を考慮すれば，電子に対する平均場ポテンシャルはおそらく図1.3のようになるだろう．また，結晶の表面付近での平均場としては図1.4のような階段型のポテンシャルを使う場合もある．E は電子のエネルギーであるが，それよりも大きなポテンシャルをもつ外部には電子が出てこられないという事情を示す簡単なモデルである．図1.4では格子までも一様にならしてしまった．図1.3や図1.4のような簡単なモデルで説明される現象は決して少なくない．しかし，このモデルにも限界があり，平均場中の1体近似で取り扱うことのできない現象も数多くある．超伝導や超流動などがその例であるが，これらは平均場中の2体近似ともいうべきモデルで理解されている．

以上見てきたように，モデルの設定は物理現象の解明にとって不可欠の手続きである．多くの場合，力学の対象としての物理現象は適当な力が作用している質点または質点系というモデルで記述される．今後力学系というとき，このようなモデルを想定して話を進める．

粒子と質点　粒子とは質量，電荷などの属性や機能をもつきわめて小さい物体を漠然と表す言葉であり，質点と混用されることがある．質点という場合，大きさの概念は初めから捨てており，粒子より抽象的な概念である．

1.2　運動の法則をめぐって

力学の理論体系は次のような**運動の法則**を設定して出発する．

第1法則：力の作用していない物体は等速直線運動をする．

第2法則：力が作用している物体は加速度運動をする．そのとき，質量と加速度の積は力に等しい．

第3法則：ある物体が他の物体に及ぼす力は，相手の物体が元の物体に及ぼす力と大きさは等しく方向は反対である．

これらの運動法則は，読者諸君にとっては，中学校・高等学校以来おなじみのものだ．何の疑問もないと思うだろう．しかし，ちょっと待っていただきたい．理論体系の出発点として受け入れるためには，内容の再検討が必要である．

質点の運動を記述するには，適当な座標系を設定し，その原点から質点に向かって引いた動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いるのが普通である．この動径ベクトルは質点の位置とともに動くから時間変数 t の関数 $\boldsymbol{r}(t)$ として表せる．質点の速度ベクトルは $\boldsymbol{v}(t)=\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)/\mathrm{d}t$，加速度ベクトルは $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)/\mathrm{d}t^2$ であるから，質量を m，力をベクトル $\boldsymbol{f}$ で表せば第2法則は，

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f} \tag{1.3}$$

と書くことができる．これで見ると力が作用しない場合は $\boldsymbol{f}=0$ だから，ただちに等速直線運動（$\boldsymbol{v}=$一定）という結果が得られる．つまり第1法則は第2法則に含まれているかのようだ．しかし，これは違う．物理法則の設定として見るとき，第1法則を設定して初めて第2法則が意味をもつ．まず，第1法則の吟味から始めよう．

1.2.1 第 1 法 則

力が作用していないとはどのような場合か？　ある人は理想的に滑らかな氷上のスケーターの運動を思い浮かべるだろう．ある人は非常に長い糸にぶら下げられた小物体（単振子）の短い時間内の運動を想像するかもしれない．力の無作用という状況については一応それでよかろう．しかし，その運動を等速直線運動と見る人は地上に座り込んで動かない観察者である．だが，ピョンピョン跳ねる器具（ホッピングという遊び道具があった）に乗っている人から見れば，それは等速直線運動ではなく，サイン・カーブのような運動に見えるだろう．では，第1法則はどちらの観察者に対するものか？　おそらく，多くの人は前者に対する法則だというに違いない．その理由は何か？ホッピング上の人が「力の作用しない物体の運動はサイン・カーブ的だ」と主張する権利はないのか？　この疑問に答えることはそれほど簡単ではない．

そもそも，力とは物体の相互作用の一形態である．私たちの日常経験を基にして考えよう．物体間の距離が離れれば，その間の力は減少するに違いない．したがって，宇宙のあらゆる物体から十分遠く離れた場所（宇宙の果て）を想定すれば，そこでは力がゼロであると考えるのが自然である．その場所に物体を1個もって行けば，それには力が作用するはずがない．いま，その物体の運動を等速直線運動と見る観察者が存在すると想像しよう．その観察者が乗っている座標系を**慣性系**という．第1法則の実質的内容はそのような慣性系が存在するという要請である．その慣性系で見たとき，等速直線運動をしている物体があれば，その物体には力は作用していないと主張してよい．これが第1法則の内容と意義である．第1法則はときに**慣性の法則**とよばれる．

慣性系はただ一つではない．原点Oをもつ直角座標Oxyzが一つの慣性系であるとき，それに対して（一定速度 $\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$ で）等速直線運動をしている他の座標系O$'x'y'z'$ も

また慣性系である．なぜならば，両座標系で見た一つの質点の位置座標 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ と $\boldsymbol{r}'=(x', y', z')$ および速度 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ と $\boldsymbol{v}'=(v_x', v_y', v_z')$ は，

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t, \qquad \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} \tag{1.4}$$

となり，$\boldsymbol{v}$ が一定ならば $\boldsymbol{v}'$ もまた一定だからである（ただし，$t=0$ で両座標系の原点は一致していたとした）．したがって，慣性系は無数にたくさんあるが，どの慣性系も力学法則の記述に関してはまったく平等の権利をもっている．式(1.4)を**ガリレイ**（Galilei）**変換**という．後のために覚えておいてほしい．

地球上の私たちにとっては，慣性系は地球外の宇宙空間にあると考えるべきだろう．その慣性系から見れば，地球に固定された座標系は加速度系の一種である回転座標系になっていて($\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t\neq 0$)，もちろん，慣性系ではない．しかし，地球上の小領域の運動に限れば，その加速度運動の効果は小さく，近似的に慣性系と見なすことができる．上記の例でいえば，座り込んでいた人は（近似的に）慣性系上の観察者であるが，ホッピングで跳ねている人は慣性系上にいるわけではない．だから，「力が作用しない物体がサイン・カーブ的運動をする」などと主張することはできない．

さて，慣性系で見たとき，物体が等速度でない運動，すなわち，加速度運動をしている場合は何が起っているのか？　第2法則はその加速度運動が力の作用によって起ることを主張し，力と加速度との関係を与えたのであった．慣性系で見て初めて力について語ることができる．つまり，第1法則を前提として第2法則がある．そもそも，最初に何の定義も与えないまま，力について語り始めていたのだった．無定義概念を使って理論体系を出発させるという手法は物理学ではしばしば用いられる．その無定義概念の意味と内容は理論体系の完成と運用によって明らかにされてゆく．第1法則は力が作用しないという力学の原点を与えるものであった．

1.2.2 第 2 法 則

第2法則を表す式(1.3)で自明なものは加速度だけである．質点の位置を表す動径ベクトル$\boldsymbol{r}$，その速度ベクトル$\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，その加速度ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ は質点の行動を時間的に追跡する観測によって知ることができる．ベクトル量としての幾何学的意味も定義自身によって明らかである．しかし，力と質量は式(1.3)で初めて出てきたものであり，決して自明な量ではない．まず，第2法則(1.3)自身を使って質量と力の定義ができるかどうかを議論しよう．

時間微分とドット しばしば，時間微分をドット（・）で表すことがある．例えば，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}$と表す．本書でもこれから断りなしにこれを使う．

その議論に入る前に二，三注意しておくことがある．式(1.3)では一応力をベクトル量，質量をスカラー量として書いたが，いずれも実験によって証明すべきことがらである．力がベクトル量で表せるためには，まずそれがベクトル算法（特に加法）に従うことを示す必要がある．例えば，3個の質点a，b，cがあるとき，aとbからcに働く力$\boldsymbol{f}$(ab→c)は，aからcに働く力$\boldsymbol{f}$(a→c)とbからcに働く力$\boldsymbol{f}$(b→c)のベクトル和

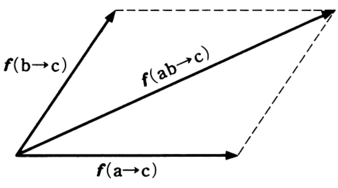


図1.5 ベクトルの和（平行四辺形の合成則）

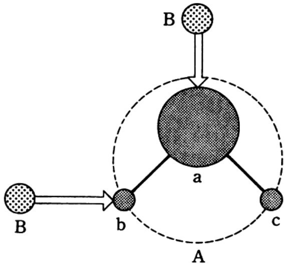


図1.6 構造のある物体との衝突

$\boldsymbol{f}(\mathrm{ab}\to\mathrm{c})=\boldsymbol{f}(\mathrm{a}\to\mathrm{c})+\boldsymbol{f}(\mathrm{b}\to\mathrm{c})$ となることを実験的に示さなければならない（図 1.5 を見よ）．万有引力や静電気力の場合は実験的に確かめられている．これは物体に働く力が 2 体力のベクトル和に分解されるという簡単な場合であり，多くの力学現象で見られる．しかし，2 体力に分解できない場合，例えば，3 個またはそれ以上の場合に初めて現れる力（3 体力または多体力）もある．ここではこれ以上立ち入らない．

---

3 体力の例　伏見の教科書（巻末参考文献）には，3 体力の例としておもしろい話が載っている．2 個の中性原子を十分離しておけば，その間には力（電磁力）は働かない．だが，そこに 1 個の電荷を導入すれば，その電場によって原子は分極して電気双極子になり，原子間に力が発生するというのである．たしかに 3 体力のよい例だ．しかし，これも原子を構成要素に分解すれば，やはり 2 体力に帰着させることができる．本質的な多体力は量子化された場が媒介すると力として現れる．

質量がスカラー量であることも自明ではない．例えば，図 1.6 のような構造をもった物体 A を考えよう．部分 a は部分 b，c に比べてきわめて大きい質量をもっているとする．A に他の物体 B が衝突するとき，⇨のような衝突と⇩のような衝突では，衝突後の A の運動は明らかに違う．この場合，A の加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ と B が A に及ぼす力 $\boldsymbol{f}(\mathrm{B}\to\mathrm{A})$ は式(1.3)のように同じ方向を向くとは限らない．すなわち，一般には，

$$\sum_{j=1}^{3} m_{ij}\dot{v}_j=f_i \qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{1.5}$$

となる（ただし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{f}$ の x，y，z 成分を番号 1，2，3 で表した）．このように，構造のある物体の質量は一般にスカラー量ではなくテンソル量（m_{ij}）として記述される．しかし，この場合も構成要素にまで分解して運動法則の適用を考えれば，やはり式(1.3)が成立すると見てよい．式(1.5)は構

造の効果を取り入れた結果なのである．基本的な運動法則はやはり式(1.3)だ．今後単に物体（または質点）というとき，質量がスカラー量である場合だけを考える．

元の問題にもどろう．一つの式(1.3)だけで二つの量 m と $\boldsymbol{f}$ が決るかという問題だ．その限りでは明らかに無理である．しかし，自然界には m や $\boldsymbol{f}$ がただ一つだけあるわけではない．数多くの物体があり，その間に各種の力が作用していて，独立で多様な無数の力学現象が存在する．それぞれに対応して，多数の m や $\boldsymbol{f}$ がある．いくつかの力学現象を選び，それらに式(1.3)を適用して，無矛盾にそれぞれの質量や力を決めて行く方法が実際にある．その場合，第3法則が重要な役割を演じる．

質量と力の単位　力の定義に式(1.3)を使うことがある．1N（ニュートン）という単位力は質量1kgの物体に $1\,\mathrm{m/s^2}$ の加速度を与える力として定義する．質量の単位1kgがすでに決められていれば，これでよい．しかし，質量の定義に再び式(1.3)を使うとどうなるか？　ある物体に1Nの力を加えたとき，$1\,\mathrm{m/s^2}$ の加速度が生じれば，その物体の質量を1kgと定義する．というわけだ．だが，1Nとは何かという疑問に逆もどりするだろう．こうして循環論に陥る．一つの式(1.3)だけで質量と力を同時に定義することはできないという話である．

1.2.3 第 3 法則

ある物体aから他の物体bに働く力 $\boldsymbol{f}(\mathrm{a}\to\mathrm{b})$ と物体bから物体aに働く力 $\boldsymbol{f}(\mathrm{b}\to\mathrm{a})$ とは，

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{a}\to\mathrm{b}) = -\boldsymbol{f}(\mathrm{b}\to\mathrm{a}) \tag{1.6}$$

という関係にある．これが第3法則であり，作用反作用の法則とよばれている．物体a，bに対する第2法則(1.3)は，

$$m_a\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=\boldsymbol{f}(b\to a) \tag{1.7a}$$

$$m_b\frac{d\boldsymbol{v}_b}{dt}=\boldsymbol{f}(a\to b) \tag{1.7b}$$

となる．ただし，m_a と m_b および $\boldsymbol{v}_a$ と $\boldsymbol{v}_b$ はそれぞれ物体 a，b の質量と速度ベクトルである．なお，物体間力以外の力（外力）はないとした．式(1.7)と式(1.6)を組み合せると，ただちに $(m_b/m_a)=|\boldsymbol{\alpha}_a|/|\boldsymbol{\alpha}_b|$ という関係が得られる．すなわち，力を及ぼし合っている二つの物体の加速度を測定すれば，その大きさの逆比が質量の比を与えるというわけだ．物体 a と c（質量 m_c）について同様の手続きを行なえば，比 (m_c/m_a) がわかる．こうして，原理的には，すべての物体の質量の m_a に対する比を知ることができる．物体 a を基準物体として質量単位を定めれば，すべての物体の質量がわかるというわけである．質量の知識があれば，加速度を観測することによって，第 2 法則を通して力を知ることができる．これは第 2 法則だけではできなかった芸当だ．第 3 法則も力学の理論体系の形成にとって不可欠のものである．

多くの場合，力は物体の位置（または位置と速度）の関数として書くことができる．質量を知り，力を位置（および速度）の関数として確定して初めて，第 2 法則は微分方程式として成立し，運動方程式という役割が与えられる．なお，式(1.3)の質量は**慣性質量**とよばれる．**重力質量**と一応区別するためである．

第 3 法則にはさらに重要な役割がある．式(1.7)の二つの式のベクトル和をとれば，式(1.6)によって，

$$\frac{d}{dt}(m_a\boldsymbol{v}_a+m_b\boldsymbol{v}_b)=\boldsymbol{f}(b\to a)+\boldsymbol{f}(a\to b)=0 \tag{1.8}$$

となる．$\boldsymbol{p}_a=m_a\boldsymbol{v}_a$，$\boldsymbol{p}_b=m_b\boldsymbol{v}_b$ は物体 a，b の運動量だから，この式は全運動量の保存則，

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{a}}+\boldsymbol{p}_{\mathrm{b}}=\text{一定} \tag{1.9}$$

を与える．逆に式(1.9)を与えれば式(1.6)が出てくる．すなわち，作用反作用の法則は運動量の保存則と等価である．しかし，力という概念を越える相互作用の場合でも運動量保存則は成立するので，作用反作用の法則は運動量保存則の中に含まれていると考えてよい．後で詳しく議論するように，運動量保存則は並進変換に対する力学系の不変性の反映である．

さて，外から力の働いていない孤立した一つの物体があったとしよう．常識で考えても，この物体がひとりでに動き出す(つまり加速度をもつ）ことはないだろう．実はこの当たり前の経験的事実の法則化が第3法則なのである．物体を二つの部分a，bに分けたとき（実際に分割せず想像上だけで分けて考えればよい)，aからbに働く力とbからaに働く力の和，すなわち，内力の和がゼロであることを第3法則は教えてくれる．もしもこの法則がなければ，孤立した物体にゼロでない力が働き，ひとりでに動き出すというおかしな現象が起るはずだ．なお，人間の歩行やロケットの運動は運動量保存則の結果であるが，読者諸君よくご存知の話であり，改めて説明する必要もないと思う．

質点a，b間の力がクーロン型の力（万有引力や静電気力など）のように距離 $r=|\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}|$ だけの関数であるポテンシャル $V(r)$ をもつ力の場合は，

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{b}\to\mathrm{a})=-\nabla_{\mathrm{a}}V(|\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}|)=-\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}})\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \tag{1.10a}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{a}\to\mathrm{b})=-\nabla_{\mathrm{b}}V(|\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}|)=-\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}})\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \tag{1.10b}$$

となる*)．いずれの力も両質点を結ぶ直線に沿い，方向は反対になっていて，自動的に式(1.6)を満足している．しかし，一

*) ここでは次のベクトル微分記号を用いた．$\nabla_{\mathrm{a}}=(\partial/\partial x_{\mathrm{a}}, \partial/\partial y_{\mathrm{a}}, \partial/\partial z_{\mathrm{a}})$，$\nabla_{\mathrm{b}}=(\partial/\partial x_{\mathrm{b}}, \partial/\partial y_{\mathrm{b}}, \partial/\partial z_{\mathrm{b}})$．

般の電磁力のように，式(1.6)は満足するが両質点を結ぶ直線に乗らない場合があることを注意しておこう．

この節の本題から離れるが，外力のない2質点系の問題(1.7)にもどる．位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$，$\boldsymbol{r}_b$ を重心座標 $\boldsymbol{R}$ と相対座標 $\boldsymbol{r}$ に変換しよう．ただし，

$$\boldsymbol{R}=\frac{m_a\boldsymbol{r}_a+m_b\boldsymbol{r}_b}{m_a+m_b}, \qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b \tag{1.11}$$

である．相対座標 $\boldsymbol{r}$ を使えば，ポテンシャル V をもつ粒子間力(1.10)は，

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{b}\to\mathrm{a})=-\boldsymbol{f}(\mathrm{a}\to\mathrm{b})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r});$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})=-\nabla V(r)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \tag{1.12}$$

となるので（∇ は相対座標 $\boldsymbol{r}$ についてのベクトル微分），簡単な計算で式(1.7)は，

$$M\ddot{\boldsymbol{R}}=0, \qquad M\equiv m_a+m_b \tag{1.13a}$$

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}}=-\nabla V(r), \qquad \mu\equiv\frac{m_a m_b}{m_a+m_b} \tag{1.13b}$$

と書き直すことができる．M は全質量であるが，μ を**換算質量**(reduced mass)という．式(1.13a)は式(1.8)そのものである．式(1.13b)は式(1.7a)，(1.7b)の両辺をそれぞれ m_a と m_b で割り，その2式を引算した後，作用反作用の法則(1.12)を適用することによって導出した．式(1.13a)は質量 M の質点が力の作用を受けないで運動している場合の方程式と同じだから，重心は等速直線運動 $\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}_0+(\boldsymbol{P}_0/M)t$ を行う．$\boldsymbol{R}_0$ と $\boldsymbol{P}_0$ はそれぞれ $t=0$ での初期位置と初期運動量である．その運動量 $\boldsymbol{P}=M\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{p}_b$ は一定であり，全運動量に等しい．式(1.9)の繰り返しだ．一方，式(1.13b)は相対座標の変動が質量 μ をもつ（仮想的な）質点の $\boldsymbol{r}=0$ を中心とする固定力 $\boldsymbol{f}$ による運動と等価であることを示している．重心についてはすでに解が得られているので，元の2質点問題は質量 μ をもつ1個の質点の運動方程式(1.13b)を解けばよいことになった．相

対運動量は,

$$\boldsymbol{p}=\mu\boldsymbol{v}=\frac{m_b\boldsymbol{p}_a-m_a\boldsymbol{p}_b}{m_a+m_b} \tag{1.14}$$

である. $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_a-\boldsymbol{p}_b$ ではない. なお, $m_b\gg m_a$ の場合は $\mu\simeq m_a$, $\boldsymbol{p}\simeq m_a\boldsymbol{v}$, $m_a\simeq m_b$ の場合は $\mu\simeq m_a/2$, $\boldsymbol{p}\simeq m_a\boldsymbol{v}/2\simeq(\boldsymbol{p}_a-\boldsymbol{p}_b)/2$ である.

1.3 運動状態の記述

これまではあいまいに, ときには物体といい, ときには質点といった. しかし, これからは統一的に質点という言葉を用いる. 解析力学の当面の対象は力が作用している質点系である力学系だ. まず力学系の運動状態をどのように記述するかというところから話を始める. それには二つの方法が考えられる. 一つは時間的に変動している力学変数を使う方法であり, もう一つは時間的に一定な力学変数(保存量)で表す方法である.

1.3.1 運動状態と力学変数

とうぶんの間1個の質点の運動を考えよう. 最も直接的な運動状態の記述法は, 質点が実際に動き回る現実の空間内に質点の軌跡を描くことである (図1.7). しかし, これだけでは軌跡上の各点における質点の速度とその増減など運動の経過がわからない. それを示すためには, 各点に質点の通過時刻を記入すればよい (図1.7では, 等時間間隔で通過点を記入してある). すなわち, 質点の位置ベクトルを時間変数 t の関数 $\boldsymbol{r}(t)$ として書き表すのである. こうしておけば, 時刻 t から t' への変位 $\boldsymbol{r}(t')-\boldsymbol{r}(t)$ を時間間隔 $(t'-t)$ で割ることによってその区間の平均速度がわかり, それは極限操作 $t'\to t$ によって時刻 t での瞬間速度 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ となる. もちろん, 加速度その他運動状態に関するすべての知識が得られる.

いうまでもなく, 時間変数 t の関数として書いた質点の位置

ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は運動方程式(1.3)の解である．前節でも述べたように，多くの場合，力 $\boldsymbol{f}$ は位置 $\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ の関数であるから，運動方程式は $\boldsymbol{r}$ についての2階常微分方程式となり，その解は初期時刻 $t=0$ における初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ と初速度 $\boldsymbol{v}_0$ を与えれば一義的に定まる．したがって位置ベクトルは確定した1価関数，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t\,;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0) \qquad (1.15\text{a})$$

として書くことができる．これが通過時刻を記入した軌跡の数式的表現である．式(1.15a)は通常微分可能な1価連続関数であるから，ただちに速度ベクトルの時間的変動がわかり，それを確定した1価関数，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t\,;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0) \qquad (1.15\text{b})$$

によって表すことができる．式(1.15a)と式(1.15b)から時間変数 t を消去すれば，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\,;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0) \qquad (1.16)$$

となるが，これは軌跡上の点 $\boldsymbol{r}$ における質点の速度を与えるものだ．だから，軌跡上に通過時刻を記入する代りに，各点 $\boldsymbol{r}$ に式(1.16)で与えられる速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を植え込んでもよい(図1.8)．これも一つの記述法だが，単に図1.7の代替という以上の意味があり，各瞬間ごとの運動状態の記述になってい

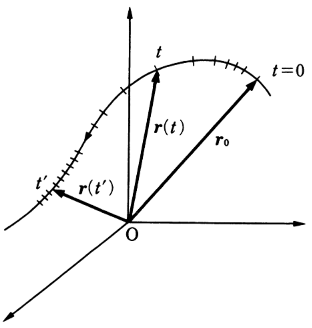


図1.7　現実の空間における質点の軌跡

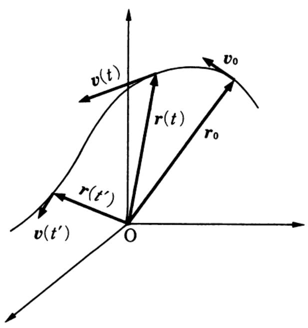


図1.8　位置と速度による運動の記述

る．

いまの場合，運動方程式は $\boldsymbol{r}$ について2階の常微分方程式であるから，時刻 t で位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ の値を与えれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t+\varepsilon)&=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{v}(t)\varepsilon\\ \boldsymbol{v}(t+\varepsilon)&=\boldsymbol{v}(t)+\frac{1}{m}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t))\varepsilon\end{aligned}\tag{1.17}$$

のようにして，運動方程式(1.3)自身が，すぐ次の時刻 $t'=t+\varepsilon$ (ε は微小量）の位置 $\boldsymbol{r}(t')$ と速度 $\boldsymbol{v}(t')$ を一義的に決める．これを続けてゆけば，t 以後の任意の時刻の $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ が得られる．すなわち，ある時刻における $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ の値の指定はその後の運動状態をすべて決めてしまう．このように，一つの時刻で運動状態を完全に指定することのできる変数 $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{v}(t)$ を**力学変数**という．速度 $\boldsymbol{v}$ の代りに運動量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ を使うことがある．その場合，力学変数は $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{p}(t)$ である．

これまでは1個の質点の運動を扱った．N 個の質点系の運動状態はどのように記述したらよいか？　現実の運動空間を直接使えば，図1.7や図1.8のような軌跡を N 本描かなければならない．これは視覚的ではあるが，特に便利とはいえない．ではどうしたらよいか？　まず，この質点系に対する運動方程式，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{(i)}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}_{(i)},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(i)}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m_{(i)}}\boldsymbol{p}_{(i)}\qquad (i=1,2,\cdots,N)\tag{1.18}$$

を基にして考えよう．$\boldsymbol{r}_{(i)}$，$\boldsymbol{p}_{(i)}$，$m_{(i)}$ はそれぞれ i 番目質点の位置，運動量，質量であり，$\boldsymbol{f}_{(i)}$ は i 番目質点に働く力である．ここでも，すべての力が質点の位置と運動量（または速度）だけの関数である場合を考えよう．多くの力学系はそうなっているからだ．このとき，式(1.18)は $3N$ 個の位置座標変数 $\{\boldsymbol{r}_{(i)}\}=\{x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}, x_{(2)},\cdots, z_{(N-1)}, x_{(N)}, y_{(N)}, z_{(N)}\}$ と $3N$ 個の運動量変数 $\{\boldsymbol{p}_{(i)}\}=\{p_{x(1)}, p_{y(1)}, p_{z(1)}, p_{x(2)},\cdots, p_{z(N-1)}, p_{x(N)}, p_{y(N)}, p_{z(N)}\}$ に対する $6N$ 個の連立（1階）常微分方程式となる

ので，ある時刻で，これらの$6N$個の位置座標および運動量変数の初期値を指定すれば，その後の運動状態は一義的に確定する．したがって，この場合の力学変数は$6N$個の変数$\{\boldsymbol{r}_{(i)}, \boldsymbol{p}_{(i)}\}$ $(i=1, 2, \cdots, N)$である．

さて，$x_{(1)}$から$p_{z(N)}$までの$6N$個の変数を座標としてもつ$6N$次元空間を設定しよう．これを**相空間**(phase space)という．$6N$個の変数の値を決めれば相空間内の1点が確定し，逆に相空間内の1点は$6N$個の力学変数の値を指定するので，相空間内の1点と一つの運動状態とは1対1対応の関係にある．この意味で相空間は一つの力学系のすべての運動状態を記述することができる．相空間の1点を力学系の**代表点**ということがある．力学系の時間発展に対応して，代表点は相空間の中で1本の軌跡または流線を描いて移動する．1本の流線はその出発点が指定する一つの初期条件から始まる運動を表している．流線が2本またはそれ以上あれば，それらは別々の初期条件から始まる運動を表すものである．いうまでもないが，流線の本数は初期条件の数に対応するものであって質点の数ではない．なお，相空間の中で，座標変数$\{\boldsymbol{r}_{(i)}\}$だけがつくる$3N$次元の部分空間を**配位空間**(configuration space)，運動量変数$\{\boldsymbol{p}_{(i)}\}$がつくる$3N$次元の部分空間を**運動量空間**(momentum space)という．

相空間による運動状態の記述は図1.7や図1.8と違って抽象的にならざるをえないが，解析力学の中ではきわめて重要な役割をもっている．詳しくは2章以後の各章で順次説明してゆくが，ここでも二，三の基本的な性質を述べておきたい．

(i) **相空間内の流線が交差することはない．**もし交差したとすれば，一つの初期条件を表す交点から二つの運動が始まることになり，運動方程式の解の一義性に反する．

(ii) **エネルギー面が交差することはない．**エネルギー保存則が成立する保存系では，相空間内の流線はエネルギーの値で決る超曲面上を動く．この超曲面を**エネルギー面**という．二つのエネル

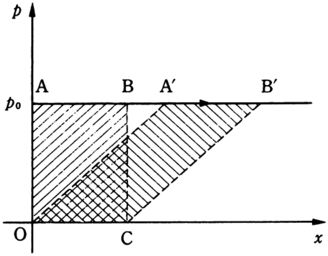


図 1.9 1次元自由粒子の相空間

ギー面が交差したとすれば，(i)の場合と同じ矛盾が生じる．

(iii) **相空間内のある領域の体積は一定である**（リウビルの定理）．相空間内の一つの領域 Γ_0 が時刻 $t=0$ での代表点の集合を表すとすれば，その領域は力学系の運動とともに移動し変形して，時刻 t では Γ_t となる．しかし，保存系ではその領域の体積 Ω は一定であり，

$$\Omega(\Gamma_0)=\Omega(\Gamma_t) \tag{1.19}$$

が成立する．式(1.19)がリウビルの定理の内容である．一般的な証明は後に譲り，1次元自由粒子という最も簡単な場合だけを見ておこう．この場合の相空間は x と p を座標軸とする2次元平面である（図1.9）．運動方程式の解は $p=p_0=$一定，$x(t)=x_0+(p_0/m)t$ なので（x_0 と p_0 は $t=0$ での位置と運動量の初期値），相空間内の流線は x 軸に平行な直線である．したがって，長方形 OABC を Γ_0 とすれば Γ_t は平行4辺形 OA′B′C となるが，x 軸上の代表点は $p_0=0$ のため動かず，両者は底辺 OC を共有する．高さも等しい．ゆえに，両者の面積は等しく，式(1.19)が成立する．

1.3.2 保存量と保存則

時間的に変動する力学変数を使う上記の方法はたしかに有用である．日食や月食を予言したり，人工衛星を見るには何時に起きてどの方向を眺めればよいかという知識は，この記述法から直接求められる．しかし，人工衛星を直接見たいと思わない人

は軌道の概略を知るだけで満足するだろう．例えば，人工衛星の軌道が円で近似できるとすれば，その半径と周期（または角速度）を知るだけでよい．円運動の場合，位置や速度を時間の関数として詳細に書いておくよりは，むしろ「点Oを中心とする半径 a の円周上を一定の周期 T（または角速度 ω）で回っている」という方がわかりやすい．運動状態全体の大局的な把握のためには，そのような記述法の方が便利だ．いまの例では，半径 a と周期 T（または角速度 ω）が時間的に一定な力学量すなわち保存量であった．これは保存量の値の指定によって運動状態を記述しようとする方法である．この種の状態記述は量子力学では広く用いられている．

保存量はたまたま偶然に存在したわけではない．保存量または保存則の存在は力学系の性格に深く根ざしたものである．この意味では，保存量の値の指定によって運動状態の特徴を大局的に把握できるのはむしろ当然だというべきだろう．解析力学の重要な仕事の一つは保存則が成立する由来と背景を理論的に解明するところにある．ここではニュートンの運動法則から直接導かれる運動量，角運動量，エネルギーの保存則について復習しておこう．

基礎とする運動方程式は式(1.18)だが，力 $\boldsymbol{f}_{(i)}$ を同じ力学系の他の質点からの力 $\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{int}}$ と外部からの力 $\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{ext}}$ とに分けておく．

$$\boldsymbol{f}_{(i)}=\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{int}}+\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{ext}} \tag{1.20a}$$

$$\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{int}}=\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{N}\boldsymbol{f}(j\rightarrow i)\,;\qquad \boldsymbol{f}(j\rightarrow i)=-\nabla_{(i)}V_{ij}(r_{ij}) \tag{1.20b}$$

質点間力 $\boldsymbol{f}(j\rightarrow i)$ としては式(1.10)型の力を設定した．$\nabla_{(i)}$ は $\boldsymbol{r}_{(i)}$ についてのベクトル微分，ポテンシャル $V_{ij}(=V_{ji})$ は質点間距離 $r_{ij}=|\boldsymbol{r}_{(i)}-\boldsymbol{r}_{(j)}|$ の関数である．この場合，質点間力は，

$$\boldsymbol{f}(j\rightarrow i)=-\boldsymbol{f}(i\rightarrow j),\quad (\boldsymbol{r}_{(i)}-\boldsymbol{r}_{(j)})\times\boldsymbol{f}(j\rightarrow i)=0 \tag{1.20c}$$

という性質をもつので，全内部力および全内部回転力の合成はゼロとなる(×はベクトル積である)．

$$\boldsymbol{F}_{\rm int}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}_{(i){\rm int}}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{f}(i\to j)+\boldsymbol{f}(j\to i))=0 \tag{1.21a}$$

$$\boldsymbol{T}_{\rm int}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{f}_{(i){\rm int}}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{r}_{(i)}-\boldsymbol{r}_{(j)})\times\boldsymbol{f}(i\to j)=0 \tag{1.21b}$$

したがって，全運動量 $\boldsymbol{P}$ と全角運動量 $\boldsymbol{L}$,

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{1.22a}$$

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{1.22b}$$

はそれぞれ次の方程式に従う．

$$\frac{{\rm d}\boldsymbol{P}}{{\rm d}t}=\boldsymbol{F}_{\rm ext}\,; \qquad \boldsymbol{F}_{\rm ext}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}_{(i){\rm ext}} \tag{1.23a}$$

$$\frac{{\rm d}\boldsymbol{L}}{{\rm d}t}=\boldsymbol{T}_{\rm ext}\,; \qquad \boldsymbol{T}_{\rm ext}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{f}_{(i){\rm ext}} \tag{1.23b}$$

$\boldsymbol{F}_{\rm ext}$ と $\boldsymbol{T}_{\rm ext}$ は外部からこの質点系に働く外力と回転力の合成である．第 2 式の導出に際しては恒等式 $({\rm d}/{\rm d}t)\,(\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{v}_{(i)})=\boldsymbol{r}_{(i)}\times{\rm d}\boldsymbol{v}_{(i)}/{\rm d}t$ を用いた．なお，式(1.22b)と式(1.23b)では原点 $\boldsymbol{r}_{(i)}=0$ を特別扱いし，そのまわりの角運動量と回転力を問題にしているのである．

(a) 運動量保存則

式(1.23a)からただちにわかるように，外力が働かないか，またはその合成がゼロであれば，全運動量が保存される．

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}=\text{一定} \tag{1.24}$$

これが**運動量保存則**である．重心の位置は，

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\boldsymbol{r}_{(i)}\,; \qquad M\equiv\sum_{i=1}^{N}m_{(i)} \tag{1.25}$$

で与えられるので $\boldsymbol{P}=M\dot{\boldsymbol{R}}$ となり，$\boldsymbol{F}_{\rm ext}=0$ の場合，重心は等速直線運動をする．これはすでに 2 質点系について見たところであった（1.2 節）．

外力がない場合，相対座標 $\boldsymbol{r}_{(i)}-\boldsymbol{r}_{(j)}$ の変動は重心の位置には無関係であり，相対座標によって表される内部運動は全質点に対する一様な並進変換，

$$\boldsymbol{r}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{r}'_{(i)}=\boldsymbol{r}_{(i)}+\boldsymbol{a} \tag{1.26}$$

をしても変らない．この不変性が運動量保存則の背景である（2章）．

(b)　角運動量保存則

外力による回転力がゼロの場合，式(1.23b)からただちに角運動量保存則，

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{p}_{(i)}=\text{一定} \tag{1.27}$$

が得られる．外力が原点Oを中心とする中心力，

$$\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{ext}}=\boldsymbol{r}_{(i)}F_{(i)\mathrm{ext}} \tag{1.28}$$

であれば（$F_{(i)\mathrm{ext}}$ は原点からの距離 $|\boldsymbol{r}_{(i)}|$ だけのスカラー関数），明らかに回転力はゼロとなる．式(1.28)型の外力の場合，全質点を原点Oのまわりで一様に回転させても，内部運動全体が相互の関係を保ったまま回転するだけで内容は変らない．この不変性が角運動量保存則の背景である（2章）．

1.2節で議論した2質点系を取り上げよう．簡単な計算で全角運動量は，

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}\times\boldsymbol{p}_{\mathrm{a}}+\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{p}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{1.29}$$

と書き直すことができる．重心座標，相対座標，全運動量，相対運動量で書いたわけだ．この式は外力があっても成立する．右辺第1項は重心の角運動量であり，外部から見れば，この力学系が原点Oのまわりでもつ軌道角運動量である．第2項，

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{1.30}$$

は相対角運動量であるが，この力学系の内部角運動量，すなわち，自転角運動量を表している．外力がない場合全角運動量が保存することは明らかである．一方，重心の方程式（1.13a）によれば，重心の角運動量は独立に保存される．ゆえに，$\boldsymbol{l}$ も保存する．もっとも，後者の保存則は式(1.13b)の力 $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{r}$

についての中心力であることから直接導かれる．$\boldsymbol{l}$がベクトルとして一定なので，相対運動は $\boldsymbol{l}$ に垂直で原点 $\boldsymbol{r}=0$ を含む平面内に限られる．この運動平面は初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ と初速度 $\boldsymbol{v}_0$ で決定されている．もちろん，$\boldsymbol{l}$ の大きさ $l=|\boldsymbol{l}|$ は一定で，

$$l=rp\sin\alpha=\mu r^2\omega \tag{1.31}$$

と書くことができる．ただし，α は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のつくる角，$\omega=(p\sin\alpha/\mu r)$ は角速度である．いずれも初等力学でよく知られた事実だ．

(c) エネルギー保存則

運動方程式(1.18)の第1式と $\boldsymbol{v}_{(i)}$ とのスカラー積をとり，i について足し合せ，恒等式 $\boldsymbol{v}_{(i)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(i)}/\mathrm{d}t=(1/2)\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_{(i)})^2/\mathrm{d}t$ を用いれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_{(i)}(\boldsymbol{v}_{(i)})^2=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{int}}+\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{ext}})\cdot\boldsymbol{v}_{(i)}$$

となる．これを時刻 t_1 から t_2 まで t について積分し，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(i)}=\boldsymbol{v}_{(i)}\mathrm{d}t$ と運動エネルギーの定義，

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_{(i)}(\boldsymbol{v}_{(i)})^2 \tag{1.32}$$

を使えば，エネルギーバランスの式，

$$T_2-T_1=\sum_{i=1}^{N}\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}(\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{int}}+\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{ext}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(i)} \tag{1.33}$$

が得られる．T_1 と T_2 および $\boldsymbol{r}_1=\{\boldsymbol{r}_{(1)}(t_1),\cdots\cdot,\boldsymbol{r}_{(N)}(t_1)\}$ と $\boldsymbol{r}_2=\{\boldsymbol{r}_{(1)}(t_2),\cdots\cdot,\boldsymbol{r}_{(N)}(t_2)\}$ はそれぞれ時刻 t_1，t_2 での運動エネルギーと質点の位置を表す．時間積分を質点の（$\boldsymbol{r}_1$ から $\boldsymbol{r}_2$ までの）経路に沿っての線積分でおき換えてよかったのは，力が位置変数だけの関数であって，時間に陽に依存していなかったからである．式(1.33)は t_1 から t_2 までの間の運動エネルギーの変化がその間に質点系に働いた力による仕事に等しいことを示している．

さて，質点間の力(1.20b)は位置だけの関数であるポテンシャルのこう配であった．同様に外力もやはり位置だけの関数で

あるポテンシャルのこう配として表せる場合，すなわち，

$$\boldsymbol{f}_{(i)\mathrm{ext}} = -\nabla_{(i)} V_{(i)\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}_{(i)}) \tag{1.34}$$

である場合，式(1.33)の右辺は経路によらず，両端 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ におけるポテンシャルの値の差 $V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)$ に等しい．ただし，V は，

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_{(i)\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}_{(i)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} V_{ij}(r_{ij}) \tag{1.35}$$

によって定義された位置変数 $\boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{r}_{(1)}, \boldsymbol{r}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{r}_{(N)}\}$ だけの関数である．V_1，V_2 をそれぞれ V の $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ における値とすれば，式(1.33)は $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ となり，**エネルギー保存則**，

$$T + V = \text{一定} \tag{1.36}$$

を与える．すなわち，運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の和である力学的エネルギー $T + V$ が保存されるのである．この場合，力が位置だけの関数であって時間に陽に依存しないポテンシャルのこう配，

$$\boldsymbol{f}_{(i)} = -\nabla_{(i)} V \tag{1.37}$$

であることが重要である．これを**保存力**という．保存力の場合，力学系は初期時刻をどう選ぼうとまったく同じように運動する．すなわち，運動状態は時間原点の移動に対して不変である．この不変性がエネルギー保存則の背景なのである（2 章）．例えば，初期条件が同じである限り，落体の運動は千年前と現在とでは変らない．この事実がエネルギー保存則に結び付いている．

2 質点系の問題にもどろう．運動エネルギーを重心座標と相対座標で書けば，

$$T = \frac{1}{2} m_\mathrm{a} \boldsymbol{v}_\mathrm{a}^2 + \frac{1}{2} m_\mathrm{b} \boldsymbol{v}_\mathrm{b}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\boldsymbol{r}}^2$$

である．外力がない場合，力学的エネルギーは，

$$\frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \left[\frac{1}{2} \mu \dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(\boldsymbol{r}) \right] \tag{1.38}$$

であり，これが一定となる．$V(\boldsymbol{r})$は質点間力のポテンシャルである．第1項は重心運動のエネルギー，第2項 $[(1/2)\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2+V(\boldsymbol{r})]$ は相対運動（内部運動）のエネルギーであるが，外力がなければ，両者は別々に保存される．

1.3.3 保存則と運動状態

保存量の値の指定が運動状態の大局的な記述に適しているという話はすでに述べた．ここではエネルギーなどの保存則から運動状態を概観し，さらに力学変数の時間的変動を引き出す方法を説明しよう．

質量 m の質点の1次元運動を考える．位置変数を x，ポテンシャルを $V(x)$，エネルギーの値を E とすれば，エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)=E \tag{1.39}$$

である．E は定数．ゆえに，速度は $V(x)$ と E によって，

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))} \tag{1.40}$$

と書くことができる．$\dot{x}$ が実数でなければならないので，運動可能領域は，

$$E\geqq V(x) \tag{1.41}$$

に限られることがわかる．なお，式(1.40)を積分すれば，

$$t-t_0=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{(2/m)(E-V(x))}}\,\mathrm{d}x \tag{1.42}$$

となり（x_0 は時刻 t_0 での初期位置），これから $x(t)$（したがって，$p(t)=m\dot{x}(t)$）の時間依存性が，

$$x=x(t\,;E,x_0),\qquad p=p(t\,;E,x_0) \tag{1.43}$$

の形で正確に得られる．だが，そこまでしなくても，式(1.40)または式(1.41)だけを使って運動を概観できる．

まず，ポテンシャル $V(x)=(1/2)Kx^2$ をもつ1次元調和振動子の運動を調べよう．V は図1.10のような形をしている．明

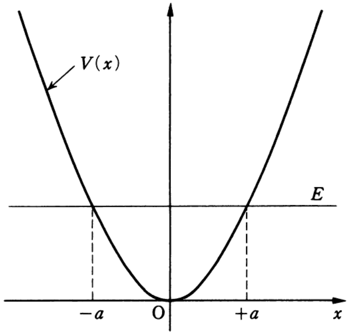


図 1.10　調和振動子の運動可能領域

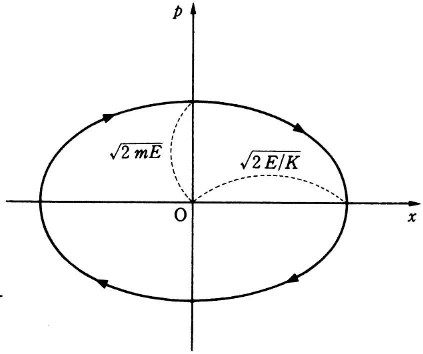


図 1.11　調和振動子の相空間

らかに $E \geqq 0$ の場合だけ運動可能領域 $(-a, a)$ が存在する $(a=\sqrt{2E/K})$．$\pm a$ を転回点という．転回点では一般に速度 0 $(\dot{x}=0)$ であるが，力は原点方向を向く．この場合，質点は $-a$ と $+a$ の間を振動する．$-a$ から出発したとすれば，速度は 0 から増加して $x=0$ で最高速度 $v_0=\sqrt{2E/m}$ に達し，次に減少しながら反対側の転回点 $+a$ で再び 0 になる．その後運動はいまの経過を正確に逆にたどるわけだ．式(1.40)の複号はその往復運動に対応したものである．運動量 $p=m\dot{x}$ を導入して相空間をつくれば，それは 2 次元平面 (x, p) となり，代表点は長短軸半径 $\sqrt{2E/K}, \sqrt{2mE}$ をもつだ円上を走る(図1.11)．このようにエネルギーという保存量の値 E が運動の詳細を決めてしまう．この場合，式(1.42)は簡単に積分できて，次のような力学変数の時間的変動が得られる．

$$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{K}}\cos(\omega t+\gamma)$$
$$p(t)=-m\sqrt{\frac{2E}{K}}\omega\sin(\omega t+\gamma) \tag{1.44}$$

ただし，$\omega=\sqrt{K/m}$，$x_0=\sqrt{2E/K}\cos\gamma$，$p_0=-m\sqrt{2E/K}\,\omega\sin\gamma$ である．E 以外に任意定数 γ が入ったが，これは初期位置 x_0

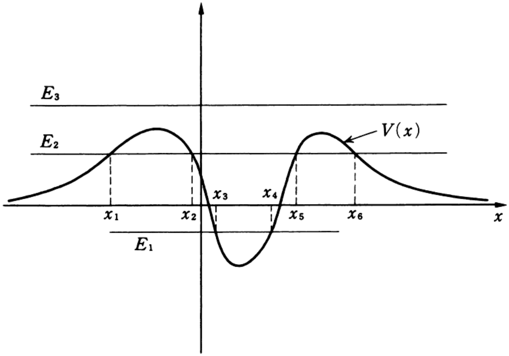


図1.12　束縛状態と衝突状態

の選択に対応するものである．式(1.44)は式(1.43)の具体例だ．

一般の場合，例えば，図1.12のようなポテンシャルの場合の1次元運動を考えよう．運動可能領域を与えるエネルギーの値としては，図のような三つの場合がある．転回点は E_1 に対して x_3，x_4の2点，E_2 に対して x_1，x_2，x_5，x_6 であるが，E_3 に対しては存在しない．E_1 の場合の (x_3, x_4) と E_2 の場合の (x_2, x_5) は振動型の運動可能領域である．このとき質点はポテンシャルの谷にとらえられ外部に出られないので，**束縛状態**といってよいだろう．E_2 の場合の $(-\infty, x_1)$ と $(x_6, +\infty)$ は束縛状態ではありえない．左方$(-\infty)$からポテンシャルに向かう質点は転回点 x_1 まで行って引き返す．右方$(+\infty)$から来た質点は転回点 x_6 まで来て帰ってしまう．E_3 の場合は引き返すことなく，式(1.40)に従って速度を増減しながら，通り抜けるだけである．このような運動状態を**衝突**（または**散乱**）**状態**という．束縛状態や衝突状態を含むすべての場合に対して，相空間の流線を描くことができるが，それは読者諸君にまかせよう(単振子については図2.1を見よ)．

外力のない2質点系の相対運動も保存量の指定によって運動状態を決めることができる．角運動量保存則のところで述べた

ように，運動平面が確定しているから，その平面上に力の中心を原点とする直角座標系(x, y)を選ぶ．しかし，中心力による運動だから，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ で定義される極座標(r, θ)を使う方が便利だ．r の変域は$(0, +\infty)$，θ の変域は$(0, 2\pi)$ である．簡単な計算で $\dot{\boldsymbol{r}}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$ となるので，相対運動のエネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+U(r)=E\,; \tag{1.45a}$$

$$U(r)=\frac{l^2}{2\mu r^2}+V(r) \tag{1.45b}$$

と書くことができる．ただし，相対運動の角運動保存則(1.31)，すなわち，

$$\mu r^2\dot{\theta}=l \tag{1.46}$$

を使って $\dot{\theta}$ を l で書き換えておいた．式(1.45a)は r 方向の速度として，

$$\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U(r))} \tag{1.47}$$

を与える．この場合，E と l が運動状態を指定する保存量である．

式(1.45a)または式(1.47)は先ほど議論した1次元問題とまったく同じだ．しかし，r は負の値をとらないので領域$(-\infty, 0)$ には無限大の高さのポテンシャル（剛体壁）があるとして扱う必要があり，さらに見掛けのポテンシャル U には本来の V のほかに遠心力ポテンシャル$(l^2/2\mu r^2)$が付加されていたのである．これが x と r の違いだ．したがって，運動可能領域は $r\geqq 0$ と $E\geqq U(r)$ によって与えられる．図1.13には万有引力(1.1)のポテンシャル，

$$V(r)=-G\frac{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}}{r} \tag{1.48}$$

に対する運動可能領域が書いてある．E_2 の場合は束縛状態であり，変数 r は転回点 r_2（近日点）と r_4（遠日点）の間で増

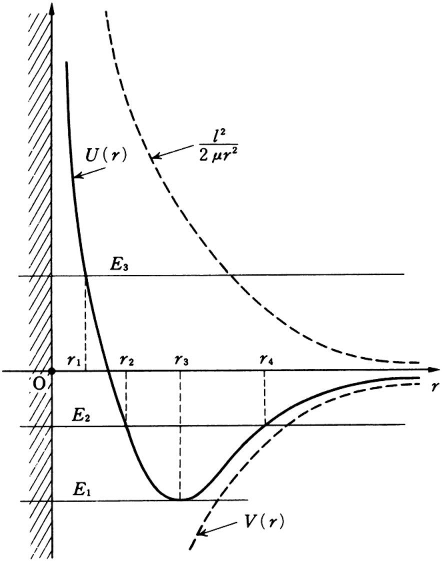


図1.13 クーロン型の力による運動

減する．$E_1=U(r_3)$ (r_3 は U の極小点) の場合は運動可能領域が1点しかないという特別な束縛状態であり，質点の軌道は半径 r_3 の円となる．$E<E_1$ には運動状態はない．一方，E_3 の場合は衝突状態に対応する．質点が遠方($+\infty$)から中心に接近して来るため，初め r は減少して r_1(近日点)に達し，再び増加して遠方($+\infty$)に向かって飛び去る．

質点の軌道を直接求めるには，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=\dot{r}/\dot{\theta}$ の右辺に式(1.47)と式(1.46)を代入し，θ について積分すればよい．

$$\theta-\theta_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2\sqrt{(2\mu/l^2)\,(E-U(r))}}\,\mathrm{d}r \tag{1.49}$$

ただし，(r_0, θ_0) は時刻 t_0 での初期位置を示す．これから軌道を表す関数が，

$$r=r(\theta\,;E,\,l,\,r_0,\,\theta_0) \tag{1.50}$$

の形で得られる．式(1.48)に対しては，E_2 の場合にだ円軌道

を，E_1 の場合に円軌道を，E_3 の場合に双曲線軌道を与える(章末問題)．

r の時間的変動は式(1.47)を積分した式,

$$t-t_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{(2/\mu)(E-U(r))}}\,\mathrm{d}r \qquad (1.51\mathrm{a})$$

から直接求められる．その答 $r(t)$ を式(1.46)に入れて積分した式,

$$\theta-\theta_0=\int_{t_0}^{t}\frac{l}{\mu r^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (1.51\mathrm{b})$$

から θ の時間依存性が求められる．いずれにしても,

$$r=r(t\,;E,l,r_0),\qquad \theta=\theta(t\,;E,l,r_0) \qquad (1.52)$$

の形の解が得られるわけである．

このように，保存量の値は運動状態の肝心な部分を決めてしまう．その保存量は，すでに示唆したように，力学系の不変性または対称性と深く結び付いている．とすれば，初等力学でやるように，位置変数の常微分方程式である運動方程式を直接解くだけでは不満足だ．もっと普遍的な量を用いて力学の内容を分析し整理すると同時に，その理論体系を形式としても発展させておきたくなる．解析力学はそれを目標にニュートンの段階を越えて行くのである．

1.4　座標変換と運動の法則

運動法則の記述に際して，質点の位置，変位，速度，加速度，質点に働く力などをベクトルであるとし，質量をスカラーとして扱ってきた．ここでは，ベクトルやスカラーという量が出てきた背景を運動法則の客観性に結び付けて考えよう．相対性原理に結び付く話題である．

1.4.1　座標系の回転と運動法則の客観性

「ベクトルとは何であるか？」と尋ねると，しばしば「大きさ

と方向をもった量である」という答を聞く．間違いではないが，あまりにも漠然としていて，物理学が必要とするベクトル以外のものまで混入してしまう．一般的には，「ベクトルとは大きさと方向をもつ量であり，和が交換可能な加法によって与えられ再びベクトルとなるもの」というべきだろう．これに対して方向をもたない量をスカラーという．通常，ベクトルとスカラーとの積（これも再びベクトルとなる）の定義を与えておく必要がある．しかし，私たちがここで議論したい問題は，抽象的なベクトルの定義ではなく，3次元ユークリッド空間のベクトルがもつ，より具体的な性質である．この場合，加法は平行四辺形の合成則（図1.5）で与えられる．この合成則はベクトルの大きさと方向が線分によって表されることを示している．ベクトルの原型は線分にあり，線分の原型は質点の変位にある．直角座標系を導入して変位を表せば，変位の各座標成分は座標系の回転に際して回転変換を受ける．したがって，3次元ユークリッド空間のベクトルはすべて，その座標成分が変位とまったく同じ回転変換を受けるものである．一方，スカラーは座標系の回転に際して不変に保たれる量である．ここでは，力学法則をそのようなベクトルやスカラーで書くことの意味を考えようというのだ．

そのため，直角座標系 Oxyz を設定しよう．二つの空間点P，Qの座標をそれぞれ(x_P, y_P, z_P)，(x_Q, y_Q, z_Q)とすれば，それらは原点Oから点P，Qに向かって引いた動径ベクトル $\boldsymbol{r}_P$，$\boldsymbol{r}_Q$ の各座標成分である．次に，この座標系をOのまわりに回転し，新しい直角座標系O$x'y'z'$ をつくる．同じ点P，Qの新しい座標を(x_P', y_P', z_P')，(x_Q', y_Q', z_Q')とすれば，これらは同じ動径ベクトル $\boldsymbol{r}_P$，$\boldsymbol{r}_Q$ の新座標成分である．記法の整理のため，x，y，z を下付番号1，2，3で表すことにしよう．例えば，$x_{P1}=x_P$，$x_{P2}=y_P$，$x_{P3}=z_P$．したがって，点Qから点Pへの変位を表す線分ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_Q$ の旧，新座標成分はそれぞれ $\Delta x_i=x_{Pi}-x_{Qi}$，$\Delta x_i'=x_{Pi}'-x_{Qi}'$（$i=1, 2, 3$）である．

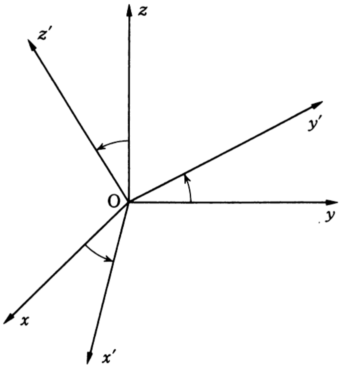


図 1.14　座標系の回転

よく知られているように，旧座標成分と新座標成分の間には座標系の回転によって決る一定の関係があり，次式が成立する．

$$x_k'=\sum_{i=1}^{3}R_{ki}x_i,\qquad x_k=\sum_{i=1}^{3}R_{ik}x_i' \tag{1.53a}$$

$$\Delta x_k'=\sum_{i=1}^{3}R_{ki}\Delta x_i,\qquad \Delta x_k=\sum_{i=1}^{3}R_{ik}\Delta x_i' \tag{1.53b}$$

ただし，R_{ki} は k 番目の新しい座標軸と i 番目の古い座標軸がつくる角の余弦であり，直交条件，

$$\sum_{i=1}^{3}R_{ik}R_{il}=\delta_{kl},\qquad \sum_{i=1}^{3}R_{ki}R_{li}=\delta_{kl} \tag{1.54}$$

を満足している（章末問題参照）．式(1.53)は座標回転に際しての位置座標変数 x，y，z と線分座標成分 Δx，Δy，Δz の変換を与えるものであり，直交条件(1.54)は，

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\sum_{i=1}^{3}x_i'^2,\qquad \sum_{i=1}^{3}(\Delta x_i)^2=\sum_{i=1}^{3}(\Delta x_i')^2 \tag{1.55}$$

を与える．これは座標回転に際して，動径ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ の長さが不変に保たれることを示している．逆に変換(1.53)に対して式(1.55)を要求すれば，直交条件(1.54)が出てくる．3 次元ユークリッド空間の特徴だ．

さて，3 次元ユークリッド空間のベクトルとは，3 個の成分

をもつ量であり，その成分が座標の回転に際して，線分と同じように，式(1.53)に従って変換されるものをいう．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{f}$ の旧，新座標成分をそれぞれ (f_1, f_2, f_3)，(f_1', f_2', f_3') とすれば，

$$f_k'=\sum_{i=1}^{3}R_{ki}f_i, \qquad f_k=\sum_{i=1}^{3}R_{ik}f_i', \tag{1.56a}$$

$$\sum_{i=1}^{3}f_i^2=\sum_{i=1}^{3}f_i'^2 \tag{1.56b}$$

が成立しなければならない．スカラーはこの変換に際して不変な量である．

質点の位置 P を表す動径ベクトル $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}$，その移動を表す変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ は定義そのものによってベクトルである．したがって，移動の所要時間 Δt で割った平均速度 $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ とその極限値である瞬間速度 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ の各座標成分は式(1.53)と同じ変換を受けるのでベクトルとなる．同様にして，加速度 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ の各座標成分もベクトルとして変換される．これらの量がベクトルであることは定義自身によって自明である．しかし，力の場合は違う．1.2.2 項で述べたように，力がベクトルとして扱えるかどうかは実験によって証明しなければならないことがらであった．

さて，質量 m の質点に力 $\boldsymbol{f}$ が作用している場合，運動方程式を座標系 Oxyz で見た座標成分で書けば，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}=f_i \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.57a}$$

となる．回転後の新しい座標 O$x'y'z'$ で見た座標成分で書けば，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_k'}{\mathrm{d}t^2}=f_k' \qquad (k=1, 2, 3) \tag{1.57b}$$

である．式(1.57a)と式(1.57b)とはまったく同じ形であり，二つの座標系の幾何学的関係を表す回転行列 $R=(R_{ki})$ によって結び付けられているだけだ．すなわち，前者に R_{ki} を掛け

て i について加えれば後者が得られ，後者に R_{ki} を掛けて k について加えれば前者が得られる．これを**形不変**または**共変的**という．この関係は質量 m が上記の意味でのスカラー量であり，位置と力が上記の意味でのベクトル量であることから出てきた結果だ．二つの座標系 Oxyz と O$x'y'z'$ で見た運動方程式が形不変であるということは力学法則の客観性に結び付く．

力学現象（一般には物理現象）の客観性について考えてみよう．いま，2人の対等な観測者 A，B がいて，独立に物理現象を研究してある物理法則に到達したとする．その物理法則を記述するために，両者は別々に座標系を設定するだろう．A の座標系を Oxyz，B の座標系を O$'x'y'z'$ とし（簡単のために直角座標系をとる），空間点 P の座標を前者で見て (x_1, x_2, x_3)，後者で見て (x_1', x_2', x_3') であるとしよう．両座標系による空間点の記述がまったく対等であるためには，2組の座標変数の間には一般に，

$$x_k' = a_k + \sum_{i=1}^{3} \mathrm{A}_{ki} x_i, \qquad x_i = b_i + \sum_{k=1}^{3} B_{ik} x_k' \tag{1.58}$$

という線形変換が成立しなければならない．ただし，A_{ki} と B_{ik} のつくる行列 A，B については，$\det AB \neq 0$，$AB = 1$ である必要がある．なぜならば，もしもこの行列式が 0 であれば，変換(1.58)は射影変換を含み，観測者 B または A は，平面または直線上に閉じ込められてしまい，両者による3次元空間点の記述は1対1対応を失うからである．なお，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ はそれぞれ Oxyz とO$'x'y'z'$ の原点を相手の座標系で見たときの座標だ(ただし，$a_k = -\sum_{i=1}^{3} A_{ki} b_i$，$b_i = -\sum_{k=1}^{3} B_{ik} a_k (k, i = 1, 2, 3)$)．また，変換の時間的変動はないものとしておく．つまり $\mathrm{d}a_k/\mathrm{d}t = 0$，$\mathrm{d}A_{ki}/\mathrm{d}t = 0$ である．時間的変動のある場合，すなわち，運動座標系への変換は 1.4.2 項と 1.4.3 項で議論する．

さて，観測者 A，B の記述法の相違とその関係を表す線形変換(1.58)は次の4種類に分けて考えることができる．

(i) 平行移動： $x_k{}'=x_k+a_k$ ($A=B=1$, $a_k=-b_k$ の場合).

(ii) 尺度変換： $x_k{}'=\lambda_k x_k$ ($a_k=0$, $A_{ki}=\lambda_k\delta_{ki}$ の場合，ただし $\lambda_k\neq 0$).

(iii) 鏡映または空間反転： 一つまたはすべての座標軸を逆向きにする変換（この場合 $\det A=\det B=-1$).

(iv) 回転： 座標系の回転による変換（$a=b=0$, $\det A=\det B=1$ の場合，このとき $A=R$, $B=R^{-1}$；R は回転行列).

平行移動は変位ベクトルの成分には何の影響も与えない．したがって，この場合ベクトル成分は変換を受けない．尺度変換は座標軸上の尺度目盛の変更であり，それに応じて各ベクトル成分はその量の次元に合う変換（換算）を行うだけである．両観測者が協議のうえ，同じ尺度を使うことにすれば，この相違は考えなくてもよい．鏡映または反転変換は右手系を左手系に変換してしまうが，これも協議のうえ，同じ右手系を使うことにすれば，この相違も消える．結局，残った相違は回転変換によって表される座標軸の方向だけであり，それが両観測者の独自性の表現となる．とすれば，観測者 A，B が独立に到達した物理法則が，各自の独自性を離れて客観的真理であるためには，回転変換に際して形不変であることが必要である*)．

この客観性の要求を回転変換に関する**相対性原理**と名づけよう．相対性原理を満足するためには，物理量は回転変換の共変量，すなわち，スカラー，ベクトル，テンソルで記述されていなければならないし，物理法則はそれらの量の共変的な組合せで書かれていなければならない．ニュートンの方程式はまさにスカラー m とベクトル $\boldsymbol{\alpha}(=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2)$, $\boldsymbol{f}$ によって式

---

*) ここで考えているのは，座標系を取り替えた際のスカラーおよびベクトルやテンソルの成分などの変換である．空間におけるベクトルの配置は固定したままであり，ベクトル自身の回転などを扱っているわけではない．しかし，もちろん，ベクトル自身を回転などして変換する場合もありうる．ベクトルを固定して座標系を回転などする場合と，座標系を固定してベクトルを回転などする場合とがあるが，両方ともベクトルの成分は変換を受ける．後者の場合の変換は前者の変換の逆変換になっている．

(1.57)のように書かれており，この相対性原理の要求を満足している．物理法則の客観性を要求する相対性原理は，物理量と物理法則の形と内容をきびしく制限してしまうのである．

1.4.2　慣性系間の変換と相対性原理

式(1.58)で$b_k=u_k t$，$B=R^{-1}$（Rは回転行列）の場合を考えよう．$\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$と$R$は一定であるとする．この場合，観測者A，Bの乗る二つの座標系OxyzとO$'x'y'z'$は$t=0$で原点を共有していたが（図1.14のような関係），その後，後者の原点O$'$は前者から見て一定速度$\boldsymbol{u}$で遠ざかる．この変換は式(1.4)で与えたガリレイ変換と回転変換の合成であるから，Oxyzが慣性系であればO$'x'y'z'$も慣性系である．この場合，式(1.58)はガリレイ変換の一般形を表す．どの慣性系も力学法則の記述に関してはまったく平等の資格をもっている（1.2.2項を見よ）ので，力学法則はこの変換に際して形不変でなければならない．この要求をガリレイの**相対性原理**という．回転変換に対する不変性はもはや明らかだから，ここでは純粋の並進運動であるガリレイ変換(1.4)に対する変換性だけを議論しよう．ニュートンの運動方程式がこの相対性原理の要求を満足していることは容易にわかる．まず，$\boldsymbol{u}$が一定なので，ただちに，

$$\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\alpha} \tag{1.59}$$

が得られる．すなわち，加速度は両座標系で見て同じである．一方，力は多くの場合質点間の相対位置の関数だから，ガリレイ変換(1.4)を行っても変らない（例えば，$\boldsymbol{r}'_{(i)}-\boldsymbol{r}'_{(j)}=\boldsymbol{r}_{(i)}-\boldsymbol{r}_{(j)}$）．したがって，式(1.57)はガリレイ変換に際して不変であり，ニュートンの古典力学はガリレイの相対性原理に合致する理論体系になっている．

しかし，マクスウェルの方程式を基礎法則とする電磁気学はそのような理論体系ではない．例えば，電磁気学が与える電磁波動の方程式（3.3.1項を見よ），

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0 \tag{1.60}$$

はガリレイ変換に対して形不変でない($\nabla^2=\sum_{k=1}^{3}\partial^2/\partial {x_k}^2$ は3次元ラプラシアン，c は光速)．なぜならば，式(1.4)によって偏微分の変数変換を計算すれば，ただちに$(\nabla^2-(1/c^2)(\partial^2/\partial t^2))\neq(\nabla'^2-(1/c^2)(\partial^2/\partial t'^2))$がわかるからだ．これでは困る！　式(1.60)が不変になるような変換をさがし出し，それを基盤として相対性原理を再構築しなければならない．

いままで特に注意しなかったが，ガリレイ変換では，互いに一定の相対速度で運動している慣性系 $Oxyz$ と $O'x'y'z'$ に乗った2人の観測者A，Bの時間は共通であると仮定していた．共通の時間に固執する限り，式(1.60)の不変性は得られない．式(1.60)が不変になる変換をつくるためには，どうしても両者の時間を別々にとる必要がある．その事情を見るため，$x_4=ict$ とおいて$(i=\sqrt{-1})$時空4次元座標変数 $x_\mu(\mu=1,2,3,4)$ を導入し，式(1.60)左辺の演算子を，

$$\Box\equiv\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial {x_\mu}^2} \tag{1.61}$$

と書き直そう．これは4次元ラプラシアンだ．したがって，x_1，x_2，x_3，x_4 を直角座標変数としてもつ4次元ユークリッド空間内の座標回転，

$$x'_\mu=\sum_{\nu=1}^{4}L_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.62}$$

に対して不変である．係数$L_{\mu\nu}$がつくる4行4列の回転行列 L は直交条件，

$$\sum_{\sigma=1}^{4}L_{\mu\sigma}L_{\nu\sigma}=\delta_{\mu\nu}\qquad\text{または}\qquad LL^{\mathrm{T}}=L^{\mathrm{T}}L=1 \tag{1.63}$$

に従う（L^{T} は L の転置行列)．実際，式(1.62)の与える偏微分についての変換式，

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}L_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\nu} \tag{1.64}$$

と式(1.63)を使えば，容易に $\Box=\Box'$（すなわち，$\sum_{\mu=1}^{4}\partial^2/\partial x_\mu{}^2=\sum_{\mu=1}^{4}\partial^2/\partial x'_\mu{}^2$)を示すことができる．さらに，同じようにして，この変換が原点からの4次元距離を不変に保つことも証明できる．

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu{}^2=\sum_{\mu=1}^{4} x'_\mu{}^2 \tag{1.65}$$

逆に式(1.65)を要求すれば，変換(1.62)が得られる．これらは4次元ユークリッド空間の特徴である．こうして，波動方程式(1.60)（ひいては電磁気学の理論体系）は4次元回転変換(1.62)に際して不変に保たれることがわかった．しかし，この変換は時間変数の変換も要求する．すなわち，相対運動をしている2人の観測者は別々の時間をもつ．変換(1.62)を**ローレンツ**（Lorentz）**変換**という．

Lは3次元空間部分の回転変換をも含んでいるが，簡単のため，$x(=x_1)$ 方向の純粋な並進運動だけを考えよう．相対速度は $\boldsymbol{u}=(u,0,0)$ である．この場合，変換(1.62)は4次元ユークリッド空間の(x_1,x_4)平面内での座標回転だから，回転角を θ とすれば，$L_{11}=\cos\theta$, $L_{14}=\sin\theta$, $L_{41}=-\sin\theta$, $L_{44}=\cos\theta$ となる．だが，変換式 $x'_1=x_1\cos\theta+x_4\sin\theta$，$x'_4=-x_1\sin\theta+x_4\cos\theta$ が実数(x,t)と実数(x',t') の間の関係を与えるためには，$\theta=i\alpha$ は純虚数(αは実数)でなければならない．また，$t=0$ で両座標系の原点が一致していたとすれば，$x'\propto x-ut$ だから，$\tanh\alpha=u/c$，$(\cosh\alpha)^{-1}=\sqrt{1-(u/c)^2}$ となる．こうして，この場合のローレンツ変換は，

$$x'=\gamma(x-ut),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\gamma\left(t-\frac{1}{c^2}ux\right) \tag{1.66}$$

であることがわかる．ただし，$\gamma^{-1}\equiv\sqrt{1-(u/c)^2}$．$(x,t)$ を (x',t') で表す逆ローレンツ変換は式(1.66)と同形で，u を $-u$ でおき換えた式となるが，これは当然の結果だろう．$(u/c)^2\ll 1$

の場合，式(1.66)は$(u/c)^2$を無視する近似でガリレイ変換(1.4)にもどる．すなわち，ローレンツ変換は，相対速度が光速度に比べて遅い場合の極限として，ガリレイ変換を含んでいる．ローレンツ変換はそのような方式でガリレイ変換を一般化したのである．

さて，アインシュタイン(A. Einstein)は，「(1)すべての慣性系で物理法則は形不変でなければならない．(2)どの慣性系で見ても光速度cは一定である」ということを要請して物理学を再構築した．この要請をアインシュタインの（特殊）**相対性原理**といい，それに基づいた理論体系を（特殊）**相対性理論**または**相対論**という．要請(2)は，$t=0$で原点を出発した光の到達面が方程式$x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0$に従って広がることを考えれば，式(1.65)の要求と同じであり，慣性系間の変換としてローレンツ変換が出てくる．アインシュタインの相対性原理の基盤はローレンツ変換にある．電磁気学はアインシュタインの相対性原理を満足する理論体系であった．

一方，ニュートンの力学は（アインシュタインのではなく）ガリレイの相対性原理に従う．これでは不満足だ．力学もアインシュタインの相対性原理に合致するように建設し直す必要がある．アインシュタインは要請(1)を指導原理としてこの作業を行った．まず，すべての力学量を4次元ユークリッド空間のスカラー，ベクトル，テンソル（3次元の場合と区別するため，4元スカラー，4元ベクトルなどという）で書き表し，次に力学法則をそれらの量の共変的な組合せで記述しようというのである．そうすれば，要請(1)が実現される．4元スカラーや4元ベクトルは3次元空間のスカラーやベクトルと混同してはならない．例えば，微小時空変位$\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_4=ic\mathrm{d}t)$は4元ベクトルであり，その第4成分である$\mathrm{d}t$は3元スカラーであっても4元スカラーではない．$(\mathrm{d}x_1{}^2+\mathrm{d}x_2{}^2+\mathrm{d}x_3{}^2-c^2\mathrm{d}t^2)$が不変量となることから明らかなように，4元スカラーとなる

時間は $\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}t\sqrt{1-c^{-2}(\dot{x}_1{}^2+\dot{x}_2{}^2+\dot{x}_3{}^2)}$ によって定義される固有時 τ である．したがって，4元速度，4元運動量に対しては変換性のはっきりした定義 $U_\mu = \mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}\tau = (\gamma \boldsymbol{v}, ic\gamma)$, $P_\mu = mU_\mu = (\gamma m\boldsymbol{v}, imc\gamma)$ を与えればよい（ただし，m は質点の質量，$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，$\gamma^{-1} = \sqrt{1-(v/c)^2}$ ）．なお，4元速度と4元運動量の各成分は独立ではなく，4次元的長さの2乗 $(\sum_{\mu=1}^{4} U_\mu{}^2 = -c^2, \sum_{\mu=1}^{4} P_\mu{}^2 = -(mc)^2)$ は一定である．

さて，相対論的力学の中核である運動方程式を，この4元運動量を使って，

$$\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = F_\mu \tag{1.67}$$

と設定しよう．右辺は4元力であり，4元ベクトルとして変換する．式(1.67)がローレンツ変換に対して形不変であることはもはや自明だ．しかし，変換性の要求だけで式(1.67)が一義的に決ったわけではない．多くの可能な形式の中では最も簡単で自然であるというにすぎない．式(1.67)の正当性は実験で確かめるべきことがらだ．いま，$F_\mu = (\gamma \boldsymbol{f}, if_0\gamma)$ とおき，式(1.67)の空間成分をとれば，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}; \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\gamma \tag{1.68}$$

が得られる．これが質量 m の質点に力 $\boldsymbol{f}$ が作用しているときの相対論的運動方程式だ．運動量は $m\boldsymbol{v}$ ではなく $m\boldsymbol{v}\gamma$ である．一方，F_μ の第4成分にある f_0 は $\boldsymbol{f}$ と独立ではない．$\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu{}^2 = -(mc)^2$ の両辺を τ について微分し，式（1.67）と式(1.68)を利用すれば，$f_0 = c^{-1}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}$ および $\mathrm{d}P_0/\mathrm{d}t = f_0$ という関係式が出てくる．ここで $P_0 = -iP_4 = mc\gamma$ とおいた．$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}$ は力 $\boldsymbol{f}$ が単位時間内に質点に対して行う仕事だから，

$$E = cP_0 = mc^2\gamma \tag{1.69}$$

は質点のもつエネルギーである．$(v/c)^2 \ll 1$ の場合，$\gamma \sim 1 + (1/2)(v/c)^2$ だから，近似式 $E \sim mc^2 + (1/2)mv^2$ が成立する．第 1 項が質量とエネルギーを結び付けたアインシュタインの関係式であり，相対論的力学の重要な成果であった．第 2 項はニュートン力学の運動エネルギーであるが，これは質点の速度が光速度に比べて遅い場合の極限として，相対論的力学がニュートン力学に移行するという事実の反映である．ローレンツ変換に対する不変性の要求は力学の内容をそこまで決めてしまった．これらは式(1.67)という選択の帰結だが，式(1.68)や式(1.69)は多くの実験によって確かめられている．

ところで，相対性理論の説明をすることがこの小節の目的なのではない．物理法則の客観性が座標変換に対する共変性によって保証されること，共変性の要求が物理法則の形式と内容をかなりの程度規制してしまうことなどを強調したかったのである．各種の変換を通して力学の理論構造を検討することも解析力学の重要な仕事になる．ここではこれ以上相対性理論に立ち入ることはしない．

1.4.3　加速度系への変換

慣性系から加速度系への変換を考えよう．1.2 節で述べたように，力学的な力 $\boldsymbol{f}$ を認識し，質量 m の質点の運動方程式を，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f} \tag{1.70}$$

と書く資格は慣性系に乗った観測者だけにある．また，慣性系から慣性系への変換に際しては運動方程式は形不変であった．しかし，加速度系は慣性系ではないから，慣性系から加速度系への変換に際しては運動方程式は形を変える．ではどのように変えるか？　それがこの小節の問題である．

慣性系と加速度系の直角座標系をそれぞれ Oxyz，O′x′y′z′ としよう．座標原点から質点の位置に向かう動径ベクトルは前者では $\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_{(i)}$，後者では $\boldsymbol{r}^* = \sum_{i=1}^{3} x^*{}_i \boldsymbol{e}^*{}_{(i)}$ である．ただし，$\boldsymbol{e}_{(i)}$，$\boldsymbol{e}^*{}_{(i)}$ はそれぞれ Oxyz と O′x′y′z′ の i 番目座標軸方向の

単位ベクトルを表す．各座標系に乗った観測者の見る力は $\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_{(i)}$，$\boldsymbol{f}^*=\sum_{i=1}^{3} f^*{}_i \boldsymbol{e}^*{}_{(i)}$ と書くことができる．この小節の仕事は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}^*$ および $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{f}^*$ の相互関係を求めることである．

まず，並進加速度系への変換を考える．これは式(1.58)で A と B が一定のまま $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が加速度運動をする場合であるが，簡単のため両座標系の座標軸が平行であるとしよう．すなわち，$\boldsymbol{e}_{(i)}=\boldsymbol{e}^*{}_{(i)}$，$A=B=1$．この場合，$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}$，$\dot{\boldsymbol{r}}^*=\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{a}}$，$\ddot{\boldsymbol{r}}^*=\ddot{\boldsymbol{r}}+\ddot{\boldsymbol{a}}$ だから，加速度系での運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}^*=\boldsymbol{f}^*; \qquad \boldsymbol{f}^*=\boldsymbol{f}+m\ddot{\boldsymbol{a}} \tag{1.71}$$

となる．見掛けの力 $m\ddot{\boldsymbol{a}}$ が加わるが，これは電車や自動車の急発進，急加速で日常経験しているところである．

次に，加速度系の一種である回転座標系への変換を考えよう．式(1.58)でいえば，$\boldsymbol{a}=0$ で A が回転行列 R となり，R が直交条件 $RR^{\mathrm{T}}=1$ を保ったまま時間的に変動する場合である．このとき上記の動径ベクトルは一致し，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*$ となる．R の時間的変動をていねいに追跡してもよいが，$\boldsymbol{e}^*{}_{(i)}$ の回転運動を表す式，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}^*{}_{(i)}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}^*{}_{(i)} \tag{1.72}$$

を使う方がここでは便利である（$\boldsymbol{\omega}$ は回転の角速度ベクトル）．式(1.72)を繰り返し使用すれば，

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1.73a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\alpha}^*+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,; \tag{1.73b}$$

$$\boldsymbol{v}^*=\sum_{i=1}^{3}\dot{x}^*{}_i\boldsymbol{e}^*{}_{(i)}, \qquad \boldsymbol{\alpha}^*=\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}^*{}_i\boldsymbol{e}^*{}_{(i)} \tag{1.73c}$$

が得られる．したがって，式(1.70)は回転座標系の運動方程式，

$$m\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{f}^*\,; \tag{1.74a}$$

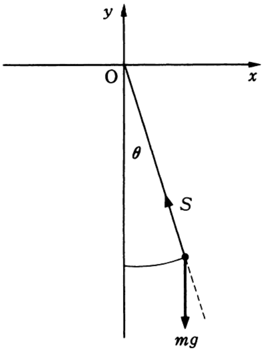
$$\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{f} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^* - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \qquad (1.74\mathrm{b})$$

に変換される．式(1.74b)の第2項以下が見掛けの力である．地球上にいる私たちは回転座標系に乗っているわけだから，このような見掛けの力を受けている．しかし，地球の回転速度はほぼ一定なので，右辺第3項は無視してよい．最後の項は地球自転による遠心力，第2項はコリオリの力である．短い距離の運動については，これら見掛けの力の影響はあまり大きくなく，地球上に固定された座標系は近似的に慣性系と考えてよい．

1.4.2項では，一定の相対速度で運動している慣性系間のローレンツ変換に対して，物理法則の不変性を要求する特殊相対性理論に触れた．では，互いに加速度運動をしている2人の観測者に対しても物理法則の形不変性を要求する一般相対性原理は考えられないか？　ロープが切れて自由落下するエレベーターは地球に対して加速度運動をするが，その中は無重力状態となって搭乗者はまったく力を感じない．とすれば，重力は地球上とエレベーターとの間の座標変換で生じる見掛けの力ではないか？　このような発想を基にしてアインシュタインは一般座標変換に対する共変性をもつ**一般相対性理論**を建設した．一般相対性理論はまずは重力場の理論である．一般相対性理論もこの教科書の守備範囲外であり，立ち入ることはしない．しかし，その定式化が解析力学の理論体系を用いて行われたことは記憶しておいてほしい．

1.5 ダランベールの原理と拘束条件のある運動

高校物理でおなじみの図1.15にあるような，糸でつり下げられた振子や滑らかな斜面上を滑り落ちる物体は，それぞれ，糸



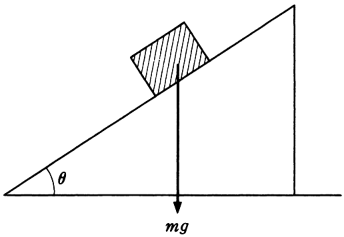


図 1.15　単振子と斜面上の運動

の長さを半径とする球面上または斜面に拘束された運動を行う．この種の運動を**拘束条件のある運動**といい，一般に運動が拘束される領域（いまの場合の球面と斜面）を**拘束面**とよぶ．拘束条件を成立させる力，すなわち，拘束面上の運動を保持させる力を**拘束力**という．振子の場合の糸の張力，斜面の場合の斜面が物体を支える力が拘束力であり，これらの例では，いずれも変位の方向に垂直である．図 1.15 の問題を解く方針は読者諸君がよくご存じだ．いずれの運動も振子または物体に働く重力によって駆動されるが，その力を拘束面に接する成分と垂直な成分とに分解すれば，後者は拘束力とつりあうので，前者が引き起す拘束面上の運動だけを解けばよい．本来 3 次元空間の運動ではあるが，実質的には拘束面上の 2 次元運動になってしまう．針金に貫かれたビーズ玉の場合，拘束面は針金という 1 次元領域となり，その針金に沿って1次元的拘束運動が起る．いずれも，拘束運動の簡単な場合である．ここでは拘束条件のある運動の一般論を学ぼう．

1.5.1　ダランベールの原理

静力学の問題から始める．いま，質点の位置 $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_{(1)}, \boldsymbol{r}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{r}_{(N)})$ だけの関数であるポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$（例えば式

(1.35)) をもつ力が作用している N 個の質点系を考えよう．この質点系が点 $\boldsymbol{r}^0=(\boldsymbol{r}^0{}_{(1)}, \boldsymbol{r}^0{}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{r}^0{}_{(N)})$ のまわりで力学的平衡状態にあるための条件は，よく知られているように，

$$\delta V=0\,; \tag{1.75a}$$

$$\delta V=V(\boldsymbol{r}^0+\delta\boldsymbol{r})-V(\boldsymbol{r}^0) \tag{1.75b}$$

である．ただし，$\delta\boldsymbol{r}=(\delta\boldsymbol{r}_{(1)}, \delta\boldsymbol{r}_{(2)},\cdots,\delta\boldsymbol{r}_{(N)})$ は各質点の平衡点 $\boldsymbol{r}^0$ からの微小な変位であり，**仮想変位**とよぶ．式(1.75a)は，仮に各質点の位置を平衡点からごくわずか $\delta\boldsymbol{r}$ だけずらしても，V の値の変化が $\delta\boldsymbol{r}$ の 2 乗の程度でしかないということを意味している．現実の運動によって生じる時間的変化と区別して，$\delta\boldsymbol{r}$ を仮想変位といった．しかし，「仮に」とはいってもまったく勝手ではなく，仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ は実現可能なものでなければならない*)．1.3 節で述べたように，力学的エネルギーを E としたとき，運動可能な領域は $E\geqq V$ である．各質点が平衡点に静止している場合は $E=V$ が成り立ち運動エネルギー $T=E-V$ はゼロである．平衡点からの微小変位は運動エネルギーをごくわずか与えた場合に実現可能となることはいうまでもない．式(1.75)はその平衡点が V の停留点であることを意味しているが，停留点には極小，極大，鞍部の 3 種類がある．極小であれば，初期微小変位に対応する変位と運動エネルギーのその後の増加は微小のままとどまる．すなわち，平衡点は安定である．一方，極大の場合，初期微小変位に対応するその後の変位と運動エネルギーの増加は有限な大きさにまで成長するので，平衡点は不安定である．また，平衡点が鞍部点的であれば，一方向には安定だが反対方向には不安定となる．平衡点が安定であるための条件は，$3N$ 個の位置座標変数についての V の 2 階導関数のつくる $3N$ 行 $3N$ 列の行列が平衡点で正値をとることである（3.1 節で再論しよう）．

さて，平衡条件(1.75a)を各質点に働く力 $\boldsymbol{f}_{(i)}=-\nabla_{(i)}V$ で

*) 仮想変位は位置ベクトル自身の微小変化であって，座標系の微小変換ではない（37 ページ脚注参照）．

書き直せば，

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{(i)} = 0 \tag{1.76}$$

となる．左辺は力 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_{(1)}, \boldsymbol{f}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{f}_{(N)})$ が，仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ の際に質点系に対して行う仮想仕事であり，平衡の条件はそれがゼロであることだ．そこで，力がポテンシャルのこう配として書けない場合にまで拡張し，式(1.76)を力学的平衡状態を決める静力学の原理として受け入れる．$\boldsymbol{f}_{(i)}=-\nabla_{(i)}V$ の場合，式(1.76)から出発して式(1.75)にもどるのは簡単だ．一般の力の場合でも，$\delta\boldsymbol{r}$ の各成分がすべて独立ならば，式(1.76)はただちに，

$$\boldsymbol{f}_{(i)}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{1.77a}$$

を与える．また，仮想変位が微小回転 $\delta\boldsymbol{\theta}_{(i)}$ による場合もあるので，$\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=\delta\boldsymbol{\theta}_{(i)}\times\boldsymbol{r}_{(i)}$ とおき，すべての $\delta\boldsymbol{\theta}_{(i)}$ の成分が独立だとすれば，式(1.76)から，

$$\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{f}_{(i)}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{1.77b}$$

が得られる．式(1.77)はたしかに質点系の平衡状態を表す力と回転力のつりあいの式である．$\delta\boldsymbol{r}$ がすべて独立であれば，式(1.76)と式(1.77)とは同等だ．

静力学から動力学に移ろう．力がつりあいの状態にない場合は式(1.77)ではなく，

$$\boldsymbol{f}_{(i)}-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}=0, \qquad \boldsymbol{r}_{(i)}\times(\boldsymbol{f}_{(i)}-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)})=0 \tag{1.78}$$

が成立し，各質点は加速度運動を行う．しかし，$-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}$ を一つの力(**慣性抵抗**)と考え，それを含めれば，力のつりあいは再び成立する．これを**ダランベール**（D'Alembert）**の原理**という．この見方に立てば，式(1.76)は動力学の場合でも成立し，

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{f}_{(i)}-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{(i)} = 0 \tag{1.79}$$

となる．これを式(1.78)の代りに動力学の基本的原理として採用してみよう．$\delta\boldsymbol{r}$ がすべて独立であれば，原理(1.79)からただちに法則(1.78)が得られる．この場合，両者は同等だか

ら，いい換えにすぎない．しかし，拘束条件のある場合は別だ．拘束条件があれば，式(1.76)と式(1.79)の $\delta \boldsymbol{r}$ はすべてが独立ではなく，式(1.77)や式(1.78)との同等性は成立しない．そこに式(1.76)をより基本的な原理として採用した意義がある．静力学では式(1.76)を**仮想仕事の原理**とよぶ．式(1.79)は動力学における仮想仕事の原理である．これはより原理的な方向への運動法則の拡張だ．

さて，この節の冒頭で述べたように，拘束条件下では i 番目質点に作用する力は，

$$\boldsymbol{f}_{(i)}=\boldsymbol{F}_{(i)}+\boldsymbol{S}_{(i)} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1.80}$$

のように質点間力と外力の合成力 $\boldsymbol{F}_{(i)}$ と拘束力 $\boldsymbol{S}_{(i)}$ の和に分解することができるが，多くの場合，拘束力 $\boldsymbol{S}_{(i)}$ は仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_{(i)}$ と直交し，

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{S}_{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{(i)}=0 \tag{1.81}$$

が成立する．これを**滑らかな拘束力**という．そのとき，式(1.76)と式(1.79)は，

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{(i)}=0 \tag{1.82}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_{(i)}-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{(i)}=0 \tag{1.83}$$

と書くことができる．ここには，問題を解くまで未知の拘束力 $\boldsymbol{S}_{(i)}$ が含まれていないことに注意してほしい．この形に書いたものを，それぞれ，**仮想仕事の原理**，**ダランベールの原理**とよぶことがある．式(1.82)は式(1.83)で $\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}=0$ とおいた場合だから，本書では両者を総称して**ダランベールの原理**とよぼう．

1.5.2 拘束条件とラグランジュの未定乗数法

さて，拘束条件問題を議論するには，拘束条件を具体的に与えなければならない．はじめに，座標変数だけに依存するスカラー関数 $G_a(\boldsymbol{r})$ によって，

$$G_a(\boldsymbol{r}_{(1)}, \boldsymbol{r}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{r}_{(N)}\,;\, t)=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.84}$$

と表された拘束条件を考えよう．これは $3N$ 次元の配位空間内で K 個の超曲面を指定する($K<3N$)．すなわち，拘束条件(1.84)は質点の運動がその超曲面群の交差面上で行われるという制限を与えるわけだ．その交差面を**拘束面**という．したがって，仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ の各成分は互いに線形式，

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla_{(i)}G_a\cdot\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.85a}$$

によって関係し合っている．また，現実の運動による時間的変化に対して，拘束条件(1.84)は，

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla_{(i)}G_a\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(i)}+\frac{\partial G_a}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.85b}$$

または，

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla_{(i)}G_a\cdot \boldsymbol{v}_{(i)}+\frac{\partial G_a}{\partial t}=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.85c}$$

という制限を与える．式(1.84)または式(1.85)の形の拘束条件を**ホロノーム型**という．その形に書けない拘束条件を**非ホロノーム型**と総称する．

非ホロノーム型の拘束条件はきわめて多様であり，一括して扱う方法はない．ここでは，ホロノーム型拘束条件と同様の方法が適用できる場合だけを扱おう．すなわち，式(1.85)を拡張し，仮想変位に対して，

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_{a(i)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.86a}$$

現実の運動による時間的変化に対して，

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_{a(i)}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(i)}+A_{a(0)}\mathrm{d}t=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.86b}$$

または，

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_{a(i)}\cdot \boldsymbol{v}_{(i)}+A_{a(0)}=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K) \tag{1.86c}$$

という制限を与える拘束条件を設定する．$A_{a(i)}=\nabla_{(i)}G_a$ および $A_{a(0)}=\partial G_a/\partial t$ となる場合，式(1.86)は式(1.85)(すなわち式(1.84)）にもどる．しかし，それ以外の場合，式（1.86a),(1.86b)は全微分型ではなく積分不可能となって，式(1.84)にもどることはできない．たしかに，非ホロノーム型の拘束条件である．しかし，式(1.85)は式(1.86)の形にも書けるので，ホロノーム型と非ホロノーム型の相違を問題にする場合以外は，式(1.86)の形式を使って議論を進めてもよい．ここでは G_a も $A_{a(i)}$ や $A_{a(0)}$ も位置座標 $\boldsymbol{r}$ だけの関数であるとしたが，速度や運動量に依存する拘束条件などもある．この節では立ち入らない．後で議論する予定である（7章)．なお，非ホロノーム型の拘束条件の具体例については，巻末文献（例えば，ホイッテカーや大貫の教科書など）を見ていただきたい．

拘束条件(1.86)をおいて問題を解く手続きは次の通りである．K 個の線形結合式（1.86a）がすべて独立であれば，$3N$ 個の仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ のうち $n=3N-K$ 個だけが独立であるから，まず残りのK個をその独立な仮想変位によって書き表す．それをダランベールの原理(1.83)(または式(1.82)）に代入すれば，独立な仮想変位だけの線形結合式になるから，その n 個の係数をゼロとおくことができる．これが拘束面上の運動方程式(またはつりあいの式）であり，それを解いて位置座標変数の時間依存性（または平衡点）を求めればよい．

もっと組織的な方式を考えよう．いま，未定の乗数 $\lambda_a(a=1, 2, \cdots, K)$ を式(1.86a)に掛けて a について加えた式と式(1.83)とを辺々足算すれば，

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_{(i)}-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}+\sum_{a=1}^{K}\lambda_a\boldsymbol{A}_{a(i)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=0 \tag{1.87}$$

となる．$\delta\boldsymbol{r}$ は $n=3N-K$ 個しか独立ではないが，この式には K 個の未定乗数λ_a が含まれている．したがって，λ_a を適当に決めれば，$3N$ 個の方程式，

$$\boldsymbol{F}_{(i)}-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}+\sum_{a=1}^{K}\lambda_a\boldsymbol{A}_{a(i)}=0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdot,N) \tag{1.88}$$

の成立が可能になるわけだ．これに式(1.86c)または式(1.85c)を連立させなければならない．未知数は $3N$ 個の $\boldsymbol{r}_{(i)}$ $(i=1,2,\cdots\cdot,N)$ と K 個の λ_a $(a=1,2,\cdots\cdot,K)$ であり，合計 $3N+K$ 個あるが，方程式の数は式(1.88)が $3N$ 個，式(1.86c)または式(1.85c)が K 個でちょうど過不足ない．すべての未知数を決めることができる．こうして，拘束条件(1.86)のある運動を解く一般的な方式がわかった．λ_a を**ラグランジュ**(Lagrange)**の未定乗数**といい，この方法を**ラグランジュの未定乗数法**という．

なお，式(1.88)で $-\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}$ 以外の部分は力 $\boldsymbol{f}_{(i)}$ であるから，拘束条件からきた最後の項はまさに拘束力を表している．

$$\boldsymbol{S}_{(i)}=\sum_{a=1}^{K}\lambda_a\boldsymbol{A}_{a(i)} \tag{1.89}$$

式(1.86a)によれば，この $\boldsymbol{S}_{(i)}$ は式(1.81)を満足する滑らかな拘束力である．

一般に，拘束条件のある運動，特に，ホロノーム型の拘束運動を扱うには，$3N$ 次元配位空間の適当な曲線座標，$q=(q_1, q_2,\cdots\cdot,q_{3N})$ を使う方が便利である．$\boldsymbol{r}$ は q の関数であるから，仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ は曲線座標の変化分 $\delta q=(\delta q_1, \delta q_2,\cdots\cdot,\delta q_{3N})$ と変化速度 $\dot{q}=(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots\cdot,\dot{q}_{3N})$ の線形結合式として次のように表すことができる．

$$\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial\boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}\delta q_k, \qquad \boldsymbol{v}_{(i)}=\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial\boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{1.90a}$$

したがって，

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}}{\partial\dot{q}_k} \tag{1.90b}$$

これを使って式(1.87)，(1.88)および式(1.86c)を q 表示に移そう．それには恒等式，

$$\sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}}{\partial q_k}$$

を用い，定義式，

$$p_k\equiv\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.91a}$$

$$A_{a,k}\equiv\sum_{i=1}^{N}A_{a(i)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k} \tag{1.91b}$$

および，

$$F_k=F_{[k]}+F_k'; \tag{1.91c}$$

$$F_{[k]}\equiv\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{(i)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k},\qquad F_k'\equiv\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}}{\partial q_k} \tag{1.91d}$$

をもち込めばよい．ただちに次式が得られる．

$$\sum_{k=1}^{3N}[(F_k-\dot{p}_k)+\sum_{a=1}^{K}\lambda_a A_{a,k}]\delta q_k=0 \tag{1.92}$$

$$F_k-\dot{p}_k+\sum_{a=1}^{K}\lambda_a A_{a,k}=0\qquad (k=1,2,\cdots,3N) \tag{1.93}$$

$$\sum_{k=1}^{3N}A_{a,k}\dot{q}_k+A_{a(0)}=0\qquad (a=1,2,\cdots,K) \tag{1.94}$$

なお，p_k，$A_{a,k}$，$F_{[k]}$ は $\boldsymbol{u}_{[k]}=\partial\boldsymbol{r}/\partial q_k(k=1,2,\cdots,3N)$ を基準ベクトルとする曲線座標系で表したベクトル $\boldsymbol{p}_{(i)}$，$\boldsymbol{A}_{a(i)}$，$\boldsymbol{F}_{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,3N)$ の k 番目共変成分である．ホロノーム型 $\boldsymbol{A}_{a(i)}=\nabla_{(i)}G_a$ の場合，式(1.91b)は，

$$A_{a,k}=\frac{\partial G_a}{\partial q_k} \tag{1.95}$$

となる．

いま，式(1.93)に $A_{b,k}$ を掛け k についての和をとれば，λ_a に対して次の線形代数方程式が得られる．

$$\sum_{a=1}^{K}D_{ba}\lambda_a=\chi_b \tag{1.96}$$

ただし，

$$D_{ba}\equiv\sum_{k=1}^{3N}A_{b,k}A_{a,k},\qquad \chi_b\equiv\sum_{k=1}^{3N}A_{b,k}(\dot{p}_k-F_k)\qquad(1.97)$$

$3N$ 次元配位空間において K 個のベクトル $A_{a,k}$ が線形独立の場合，$D_{ba}\,(=D_{ab})$ を要素とする K 行 K 列の対称行列 D は，$\det D\neq0$ であるから，逆行列 D^{-1} をもつ．したがって，式(1.96)は λ_a について解くことができて，

$$\lambda_a=\sum_{b=1}^{K}(D^{-1})_{ab}\chi_b\qquad(1.98)$$

となる．運動が解けていれば，すなわち，q の時間依存性を知ることができれば，右辺の量はすべて求められる．そのとき，ラグランジュの未定乗数は式(1.98)によって与えられ，それを式(1.89)に代入すれば拘束力がわかるのである．

ホロノーム型(1.84)の場合，q の $n+1$ 番目から $3N$ 番目までの K 個を，

$$q_{n+1}=G_1+c_1,\quad q_{n+2}=G_2+c_2,\quad\cdots,\quad q_{3N}=G_K+c_K\qquad(1.99)$$

と選べば便利だ（c_a は定数）．このとき，式(1.84)と式(1.85a)はそれぞれ，

$$q_{n+a}=c_a,\qquad \delta q_{n+a}=0\qquad(a=1,2,\cdots,K)\qquad(1.100)$$

となり，式(1.90a)の右辺の和では $k=n+1$ から $k=n+K$ までの項が消える．拘束面をこれら K 個の変数の座標面に選んだからである．残りの独立変数 q_1，q_2，$\cdots$，q_n としては，拘束面上の曲線座標をとれば好都合である．このとき，$(\partial G_a/\partial q_k)=\delta_{k,n+a}$，$D_{ba}=\delta_{ba}$ となるので，式(1.93)，(1.94)と式(1.98)は，

$$F_k-\dot{p}_k=0\qquad(k=1,2,\cdots,n)\qquad(1.101\text{a})$$

$$\dot{q}_{n+a}=0\qquad(a=1,2,\cdots,K)\qquad(1.101\text{b})$$

$$\lambda_a=\chi_a=\dot{p}_{n+a}-F_{n+a}\qquad(a=1,2,\cdots,K)\qquad(1.102)$$

を与える．式(1.101a)は拘束面上の変数だけの運動方程式であり，拘束条件そのものは表面から消えた．式(1.101b)が拘束条件を表す．この方程式を解いて $q_1, q_2, \cdots, q_n$ の時間依存性を知れば，式(1.102)によってラグランジュの未定乗数が

求められる．この場合，ラグランジュの未定乗数 λ_a が拘束力の $n+a$ 番目共変成分となった．

1.5.3 簡単な例題

図1.15の単振子（質量 m）の運動を扱ってみよう．運動が支点Oを含む鉛直面内で行われるとして，図のように直角座標系 (x, y) と極座標系 (r, θ) を設定すれば，位置の直角座標表示は $\boldsymbol{r}=(r\sin\theta, -r\cos\theta)$ である．糸のたわみの問題を避けるために，運動を $\theta<\pi$ に制限しておく．糸の質量は無視する．重力の加速度を g とすれば，力の x, y 成分は $\boldsymbol{F}=(0, -mg)$．このとき，極座標系の基準ベクトルは $\partial\boldsymbol{r}/\partial r=(\sin\theta, -\cos\theta)$，$\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta=r(\cos\theta, \sin\theta)$ となるので，力の共変成分は $F_r=\boldsymbol{F}\cdot\partial\boldsymbol{r}/\partial r=mg\cos\theta$，$F_\theta=\boldsymbol{F}\cdot\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta=-mgr\sin\theta$ となる．糸の長さを r_0 とすれば拘束条件は $r=r_0$ であり，$r=$一定の座標面が拘束面になるので，ただちに1.5.2項末の方法を適用することができる．$r=r_0$ のため，$\dot{p}_r=m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\partial\boldsymbol{r}/\partial r=-mr_0\dot{\theta}^2$，$\dot{p}_\theta=m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta=mr_0{}^2\ddot{\theta}$ となるから，式(1.101)と式(1.102)によって，

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{r_0}\sin\theta=0, \qquad \lambda=-mr_0\dot{\theta}^2-mg\cos\theta \tag{1.103}$$

が得られる．第1式が拘束面上の運動方程式であり，第2式が糸の張力を与える．初等力学でおなじみの式だ．これ以上の説明は不要だろう．

剛体の運動は内部の質点間の相対位置が固定されているので拘束条件問題と見てよい．簡単な例として，相対距離が一定に保たれた等しい質量 m をもつ2個の質点a，bからなる系を取り上げよう．各質点に働く外力を $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$（$=\boldsymbol{F}$ とおく）とすれば，そのベクトル和はゼロとなり重心は等速直線運動をするので，重心のまわりの回転運動だけを考えれば十分だ．そこで，重心を原点に選び質点の位置を動径ベクトル $\boldsymbol{r}_a$，$\boldsymbol{r}_b$ で表そう（図1.16）．この場合，可能な仮想変位と運動は $\boldsymbol{r}$ と

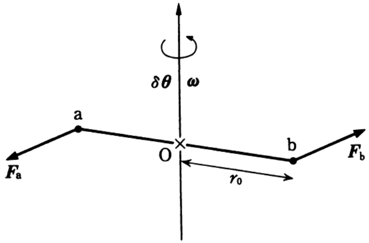


図 1.16　簡単な剛体

$\boldsymbol{F}$ でつくられる平面上に限られ，原点を通りその平面に垂直な直線を軸とする回転となる．拘束条件はこの平面上の $\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{r}_b$ に対して $\boldsymbol{r}_a = -\boldsymbol{r}_b$（$=\boldsymbol{r}$ とおく）と $|\boldsymbol{r}| = r_0$（$2r_0$ は相対距離），仮想変位に対して $\delta\boldsymbol{r}_a = -\delta\boldsymbol{r}_b = \delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}$ である．$\delta\boldsymbol{\theta}$ は回転軸と同方向を向く仮想角変位ベクトルであり，$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$, $\delta\boldsymbol{r}$ と直交する．回転力の式 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{r}_b\times\boldsymbol{F}_b = 2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を使えば，式(1.83)の力の部分は $\boldsymbol{F}_a\cdot\delta\boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{F}_b\cdot\delta\boldsymbol{r}_b = \delta\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T}$ となる．一方，$\delta\boldsymbol{\theta}$ と同方向の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ によって，加速度は $\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ と表せる（式(1.73)を見よ)．$\delta\boldsymbol{\theta}$ および $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}$ および $\delta\boldsymbol{r}$ との直交性を用いれば，式(1.83)の慣性項は $m\ddot{\boldsymbol{r}}_a\cdot\delta\boldsymbol{r}_a + m\ddot{\boldsymbol{r}}_b\cdot\delta\boldsymbol{r}_b = 2m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\theta}\cdot\dot{\boldsymbol{L}}$ となる．ここで，$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$, $I = 2mr_0^2$ とおいた．$\boldsymbol{L}$ は角運動量，I は慣性能率である．こうして，ダランベールの原理は $\delta\boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{T} - \dot{\boldsymbol{L}}) = 0$ となった．$\boldsymbol{T}$, $\dot{\boldsymbol{L}}$ は $\delta\boldsymbol{\theta}$ と同方向のベクトルであり，この剛体の運動方程式は仮想角変位 $\delta\boldsymbol{\theta}$ の係数をゼロとおいて得られる．

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{T} \tag{1.104}$$

問　　題

1.1 モデル作りでは量の比較が重要であった．1.1 節の議論を進めるための量の比を概算してみよう（「理科年表」(丸善) などを参考にするとよい)．

(a)　太陽のまわりの地球の運動の場合：地球・太陽間距離に対する地球と太陽の直径の比，太陽直径に対する地球直径の比を概算せよ．また，両者の質量の比から換算質量を求め，太陽を固定した万有引力の中心として扱う近似の精度を概算せよ．

(b)　水素原子の場合：電子・陽子間の静電引力に対する万有引力の比を概算せよ．この場合の換算質量を求め，陽子を固定静電引力の中心として扱う近似の精度を概算せよ．

1.2　保存力 $\boldsymbol{F}$ はポテンシャル V のこう配として $\boldsymbol{F}=-\nabla V$ のように書くことができる．ただし，$\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ はベクトル微分演算子である．1.1 節の議論に関連して次の問に答えよ．

(a)　式(1.1)の力がポテンシャル $V=-GMm/R$ をもつことを示せ．G は万有引力定数，M と m は太陽と地球の質量，R は地球・太陽間距離である．すなわち，地球と太陽の位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，$\boldsymbol{r}'=(x', y', z')$ とすれば，$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$．

(b)　地球から人工衛星に働く力(1.2)のポテンシャルは $V=-\sum_i Gmm_i/R_i$ であることを示せ．m と m_i は人工衛星と地球の i 番目部分物体の質量，$R_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$ は両者間距離である．ただし，前者の位置を $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，後者の位置を $\boldsymbol{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$ とした．いうまでもないが，人工衛星を質点として扱っている．

1.3　前問(b)において，地球の質量分布が連続的であり，密度関数 $\rho(x, y, z)$ をもつとすれば，地球から人工衛星に働く力のポテンシャルは，

$$V(x, y, z)=-Gm\iiint\frac{\rho(x', y', z')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

である．積分は地球全体について行う．次の問に答えよ．

(a)　地球が完全な球体であり，質量分布が一様である場合，十分小さい人工衛星に働く力は地球の外で式(1.1)の形になることを示せ．ただし，M，m は地球と人工衛星の質量，$\boldsymbol{R}$ と R

は地球の中心から人工衛星に向かう動径ベクトルと距離である．また，地球内部ではこのポテンシャルと力はどのような形になるか？

(b)　地球がごくわずか完全な球形から変形している場合，または完全な球形であっても質量分布がごくわずか一様でない場合，どのような補正を(a)の場合のポテンシャルと力に加えたらよいか？

1.4　1.2.3項では外力のない2体系の運動を扱った．この2体系を一様な外力，例えば，一様な重力場の中に置いたときの運動を議論せよ．

1.5　ポテンシャル $V(x)=(1/2)Kx^2$ をもつ1次元調和振動子に対して積分(1.42)を実行し，式(1.44)を求めよ．さらに，相空間の領域を適当に設定し，そこに含まれる代表点の運動による領域の移動・変形にもかかわらず，面積が一定であること（リウビルの定理）を具体的な解の利用によって示せ．

1.6　両端の電位をゼロに保った1次元領域 $-a \leqq x \leqq a$ の中点に正の電位 $V(>0)$ をもつグリッド(電子などが通り抜けられる網)をおき，$x=b$ の点（$0<b<a$）に質量 m，電荷 $-e(<0)$ をもつ電子を速度ゼロで投入した場合の運動を求め，相空間の流線を書け．

1.7　平面上を運動する質量 m の2次元調和振動子がある．この平面上に直角座標系 Oxy を設定すれば，力は $\boldsymbol{F}=(-ax, -by)$ と表せる($a>0$，$b>0$)．このとき，xy 平面上の軌跡を次の場合に対して求めよ．(i) $a=b$ の場合．(ii) $a=4b$ の場合．(iii) さらに，$\sqrt{a/b}$ が有理数になるときと，無理数になるときの本質的相違について説明せよ．

1.8　質量 M，電荷 $Ze(>0)$ の原子核と質量 m，電荷 ze の粒子からなる2体系の相対運動について以下の問に答えよ．ただし，Z は正の整数，z は正負の値をとる整数である．粒子間力はポテンシャル $V=Zze^2/4\pi\varepsilon_0 r$ をもつ静電力だけであるとしよう（ε_0 は真空の誘導率，r は粒子間距離）．

(a) 相対座標の軌跡が，電荷とエネルギーの正負によって，だ円，放物線，双曲線となることを式(1.49)の積分を実行して示せ.

(b) だ円運動の場合，周期とだ円の長短軸の長さをエネルギーと角運動量の値の関数として表せ.

(c) 双曲線運動は原子核による粒子の散乱（ラザフォード散乱）のモデルとなる（$E>0$の場合）. その双曲線の二つの漸近直線がつくる角 θ を散乱角という（図1.17）. 積分(1.49)を計算して，散乱角が，

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{Z|z|e^2}{4\pi\varepsilon_0\mu v_0{}^2 b}$$

によって与えられることを示せ. μ は換算質量，v_0 は初速度，b は衝突パラメーター（入射方向を表す漸近直線と原子核との最短距離で衝突径数ともいう）である. なお，衝突・散乱問題の初期状態指定に初速度 $v_0=\sqrt{2E/\mu}$ と衝突径数 $b=l/\mu v_0$ を使うことが多い（l は角運動量）. これも保存量（E, l）による運動状態の記述だ.

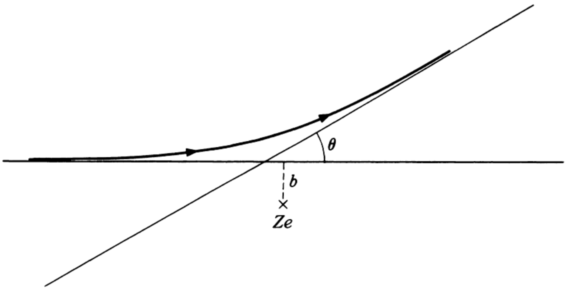


図1.17　散乱角(斥力の場合)

1.9　地球自転の角速度を概算せよ.

1.10　地球自転の角速度を与えて，(a) 地表上の質点に働く遠心力，(b) 円軌道上を地球自転と同じ角速度をもって運行している人工衛星（静止衛星）の軌道半径を求めよ. ただし，地球は完全

な球体であり，一様な質量分布をもつとする．

1.11　右手直角座標系 Oxyz の各座標軸方向の単位ベクトルを，それぞれ，$\boldsymbol{e}_{(1)}$，$\boldsymbol{e}_{(2)}$，$\boldsymbol{e}_{(3)}$ とすれば（x, y, z を番号 1, 2, 3 に対応させた），$\boldsymbol{e}_{(i)}\cdot\boldsymbol{e}_{(j)}=\delta_{ij}$ および $\boldsymbol{e}_{(i)}\cdot\boldsymbol{e}_{(j)}\times\boldsymbol{e}_{(k)}=\varepsilon_{ijk}$ である．δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号で，$i=j$ のとき 1，$i\neq j$ のとき 0 を表す．ε_{ijk} はレビチビタの記号だが，任意の 2 個の添字の交換に対して符号を反転する完全反対称テンソルであり，独立成分はただ一つしかない．明らかに，$\varepsilon_{123}=1$ であり，他の成分はこれから導かれる．2 個の添字が同じ番号をとれば 0 となる．この座標系を原点 O のまわりに回転してつくった新しい右手座標系 O$x'y'z'$ の各座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_{(1)}'$，$\boldsymbol{e}_{(2)}'$，$\boldsymbol{e}_{(3)}'$ とすれば，積について上記とまったく同じ関係式が成立する．二つの座標系を使って原点から一つの空間点に至る動径ベクトルを表せば $\boldsymbol{r}=\sum_i \boldsymbol{e}_{(i)}x_i=\sum_k \boldsymbol{e}_{(k)}'x_k'$ である（和は i と k について 1, 2, 3 ととる）．次の問に答えよ．

(a)　式(1.53)を導け．ただし，$R_{ki}=\boldsymbol{e}_{(k)}'\cdot\boldsymbol{e}_{(i)}$．

(b)　式(1.54)および $\det(R_{ki})=1$ を証明せよ．

(c)　$\delta_{lm}=\sum_i\sum_j R_{li}R_{mj}\delta_{ij}$，$\varepsilon_{lmn}=\sum_i\sum_j\sum_k R_{li}R_{mj}R_{nk}\varepsilon_{ijk}$ を証明せよ．

(d)　ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ のベクトル積の成分が $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}A_jB_k$ と書けること，そしてこの成分が座標回転に際してベクトルとして変換することを証明せよ．

(e)　各座標軸 x，y，z のまわりの角度 θ の回転を表す行列 $R_x(\theta)$，$R_y(\theta)$，$R_z(\theta)$ は，それぞれ，次のように表されることを示せ．

$$R_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\qquad R_y=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 00\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$R_z=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(f) 左手系を使うといままでの関係式はどのように変るか？

1.12 質量 m_a, m_b の質点 a, bの衝突を考えよう．外力はないとする．衝突によって，運動量が初期値 $\boldsymbol{p}_a=(0, 0, m_a v_0)$, $\boldsymbol{p}_b=(0, 0, 0)$ から終期値 $\boldsymbol{p}_a'=p_a'(\sin\theta_a, 0, \cos\theta_a)$, $\boldsymbol{p}_b'=p_b'(\sin\theta_b, 0, \cos\theta_b)$ に変ったとしよう．衝突前に標的 b が静止している座標系を選んだが，これを**実験室系**という．$\boldsymbol{p}_a$ と $\boldsymbol{p}_a'$ の角 θ_a が実験室系での散乱角だ．この現象を重心が静止している運動座標系，すなわち，**重心系**で観察したい．衝突前後の重心系における運動量を $(\boldsymbol{p}_a^*, \boldsymbol{p}_b^*)$, $(\boldsymbol{p}_a^{*\prime}, \boldsymbol{p}_b^{*\prime})$ とすれば，$\boldsymbol{p}_a^*$ と $\boldsymbol{p}_a^{*\prime}$ の角 θ_a^* が重心系での散乱角である．次の問に答えよ．

(a) 実験室系から重心系へのガリレイ変換を求めよ．

(b) $\boldsymbol{p}_a^*+\boldsymbol{p}_b^*=\boldsymbol{p}_a^{*\prime}+\boldsymbol{p}_b^{*\prime}=0$ であることを示せ．

(c) $\tan\theta_a=\sin\theta_a^*/(\cos\theta_a^*+(m_a/m_b))$ を証明せよ．

(d) p_a' を v_0, m_a, m_b, θ_a^* などで示せ．

(e) 衝突前後の相対運動量が $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_a^*$, $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}_a^{*\prime}$ となることを示せ．衝突・散乱問題は 6 章でもう一度議論する．

1.13 重力の加速度 g をもつ一様な重力場中を自由落下する運動座標系に乗って見たとき，問題 1.4 の 2 体系の運動はどのようになるか？

1.14 1.5.3 項では鉛直面内での単振子の運動を拘束条件問題として扱った．鉛直面内という制限を取り去れば球面振子の運動となる．この問題を拘束条件問題として議論せよ．

1.15 図1.15の斜面上の運動を拘束条件問題として扱い，(a) θ が一定の場合，(b) θ が時間的に変化する場合，特に $\tan\theta=a\cos\omega t$ の場合（a, ω は定数）に対して解け．ただし，斜面は滑らかであるとし，物体を質点として扱ってよい．

2 ラグランジュの方程式とハミルトンの正準方程式

2.1 一般座標とラグランジュの方程式

力学の基礎法則であるニュートンの運動方程式はしばしば，式(1.18)のように，ベクトル記法で書かれている．ベクトル記法そのものは座標系の選択に無関係であり，たいそう便利だが，そのままで解ける問題は少ない．具体的な問題を解くには，それに適した座標系を導入して，運動方程式をその座標成分で書き表す必要がある．まず，最も簡単な直角座標系による記述から出発しよう．直角座標系では運動方程式(1.18)は，

$$
\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_{(i)} &= -\frac{\partial V}{\partial x_{(i)}} \\
m_i \ddot{y}_{(i)} &= -\frac{\partial V}{\partial y_{(i)}} \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \\
m_i \ddot{z}_{(i)} &= -\frac{\partial V}{\partial z_{(i)}}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

と書くことができる．ここで，m_i は i 番目質点の質量，$(x_{(i)}, y_{(i)}, z_{(i)})$ はその位置座標である．簡単のため，ポテンシャル $V(x_{(1)}, \cdots, z_{(N)})$ をもつ保存力 $\boldsymbol{F}_{(i)} = -\nabla_{(i)} V$ だけが作用するとした．とうぶんの間非保存力や拘束力は考えない．直角座標成分で書いた運動方程式はこのように簡単な形をしていて見

やすく，座標系の回転に際して形不変である．1.4節で議論したように，この共変性は力学法則の客観性を意味しており原理上重要なものであった．

しかし，直角座標系が一番便利だとは必ずしもいえない．例えば，中心力場における運動の解析には極座標の方が適していた．また，1.5節で見たように，拘束条件のある運動の場合は，拘束面を一つの座標面とする曲線座標系が便利であった．一方，重心座標や相対座標のように，各質点の座標変数そのものよりも，それらの組合せの方が便利な場合もある．さらに，運動座標系への変換が必要になるときもある．いずれの場合も，新しい変数は各質点の直角座標変数の関数として与えられる．このような新しい変数を総称して**一般座標**（または**一般化座標**）という．一般座標変数を使う場合，各質点の直角座標変数から一般座標変数への変換，さらには，一般座標変数から他の一般座標変数への変換が要求される．しかし，ニュートンの運動方程式はこのような変換に対しては一般に共変的ではなく形を変える．形不変性は必ずしも成立しない．

例として，中心力場（ポテンシャル $V(r)$）における質量 μ の質点の運動を取り上げよう．この場合，1.3.2項で学んだように，軌道角運動量が一定となり，運動は初期位置と初期運動量が決定する平面上で行われる．その平面上の直角座標を x，y，極座標を $r(=\sqrt{x^2+y^2}\,)$，$\theta(=\tan^{-1}(yx^{-1}))$ とし，極座標を使って運動方程式を書けば，それは式(2.1)と同じ形の，

$$\mu\ddot{r}=-\frac{\partial V}{\partial r},\qquad \mu\ddot{\theta}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

とはならない．正しくは，

$$\mu\ddot{r}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(V+\frac{l^2}{2\mu r^2}\right),\qquad \dot{l}=0 \tag{2.2}$$

となる（ただし，$l=\mu r^2\dot{\theta}$）．これは上の式とはまったく違う．式(2.1)は直角座標から極座標への変換に際して形不変ではないのだ．もちろん，変数変換を正しく実行すれば，式(2.1)か

ら式(2.2)を出すことができる．式(2.1)から出発すれば，どんな一般座標を使っても運動方程式を書くことは可能だ．しかし，個々の問題に対して，一つひとつ運動方程式の変数変換を実行するというのでは，あまりにも芸がない．一般的な変数変換に際して共変的な，すなわち，一般座標について形不変な運動方程式の表現方法はないものか？　この要求を満たしてくれるものがラグランジュの方程式である．解析力学はそこから出発する．

2.1.1 ニュートンの方程式からラグランジュの方程式へ

直角座標をいちいちx，y，zと書いていては面倒なので，次のように通し番号を付けて整理しよう．

$$x_{(1)}=x_1,\qquad y_{(1)}=x_2,\qquad z_{(1)}=x_3$$
$$x_{(2)}=x_4,\qquad y_{(2)}=x_5,\qquad z_{(2)}=x_6$$
$$\cdots\cdot$$
$$x_{(N)}=x_{3N-2},\qquad y_{(N)}=x_{3N-1},\qquad z_{(N)}=x_{3N}$$

こうして，すべての直角座標変数は $x_i(i=1,2,\cdots\cdot,3N)$ のように一つの記号で書くことができ，ニュートンの方程式(2.1)は，

$$m_i\ddot{x}_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\qquad(i=1,2,\cdots\cdot,3N)\tag{2.3}$$

となる．しばらくの間，非保存力や拘束力は考えない．後で取り入れる．なお，式(2.3)の m_i の番号 i は式(2.1)の場合とは少々違う．後者は質点の番号であった．前者の $m_1=m_2=m_3$ は後者の m_1，前者の $m_4=m_5=m_6$ は後者の m_2，$\cdots\cdot$，前者の $m_{3N-2}=m_{3N-1}=m_{3N}$ は後者の m_N に等しい．簡単のために同じ記号を用いたが，混乱は起らないと思う．

さて，ここで運動エネルギー，

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\tag{2.4}$$

を使うことを考えよう．この式を見れば，運動量を，T の $\dot{x}_i$

についての偏微分，

$$p_{x_i}=m_i\dot{x}_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \tag{2.5}$$

として表せることは明らかだ．したがって，式(2.3)は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}-\left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)=0 \tag{2.6}$$

のように書き直すことができる．T が $\dot{x}_i$ だけの関数，V が x_i だけの関数という事情を考慮すれば，$\partial T/\partial x_i=0$，$\partial V/\partial \dot{x}_i=0$ である．そこで，

$$L\equiv T-V \tag{2.7}$$

という量を導入すれば，$\partial L/\partial \dot{x}_i=\partial T/\partial \dot{x}_i$，$\partial L/\partial x_i=-\partial V/\partial x_i$ が成立するので，式(2.6)は一つの量 L によって，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \tag{2.8}$$

と書ける．これを**ラグランジュの方程式**といい，L を**ラグランジアン**または**ラグランジュ関数**という．運動量 p_{x_i} と力 $F_{x_i}=-\partial V/\partial x_i$ もこの L で表すことができる．

$$p_{x_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},\qquad F_{x_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{2.9}$$

式(2.8)は直角座標で書いたラグランジュの方程式である．これが直角座標変数 $x=(x_1, x_2, \cdots\cdot, x_{3N})$ から一般座標変数 $q=(q_1, q_2, \cdots\cdot, q_{3N})$ への変換に際して形不変であることを確かめたい．両変数の関数関係を，

$$x_i=x_i(q_1, q_2, \cdots\cdot, q_{3N}\,;\,t) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdot, 3N) \tag{2.10a}$$

$$q_i=q_i(x_1, x_2, \cdots\cdot, x_{3N}\,;\,t) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdot, 3N) \tag{2.10b}$$

としよう．簡単のため，$x=x(q\,;\,t)$ および $q=q(x\,;\,t)$ と書くこともある．時間変数 t の依存性を入れたのは運動座標系への変換や時間的に変動する拘束条件なども扱いたいからである．一般座標 q が直角座標 x と同等の資格で $3N$ 次元配位空間を記述できるためには，変換 $x\to q$ が1対1であり，逆変換 $q\to x$ が存在しなければならない．その条件は任意の時空点で

$\partial x_i/\partial q_j(i, j=1, 2, \cdots, 3N)$がつくる行列の行列式がゼロにならないことである．なお，拘束条件があるとき独立変数の数は$3N$より減るが，その場合でも変数変換の式(2.10)では両変数の数は$3N$だ．

式(2.10)をtについて微分すれば，速度$\dot{x}=(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_{3N})$と一般座標の時間的変化を表す**一般速度**（または**一般化速度**）$\dot{q}=(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_{3N})$の関係が次のように得られる．

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{2.11a}$$

$$\dot{q}_j=\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial q_j}{\partial x_k}\dot{x}_k+\frac{\partial q_j}{\partial t} \tag{2.11b}$$

式(2.11a)を$\dot{q}_k$，式(2.11b)を$\dot{x}_i$について偏微分すれば，

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \tag{2.12}$$

が成立する．$\partial x_i/\partial q_k$などが$q$の関数であるため，$\dot{x}$は$\dot{q}$と$q$に依存し，直角座標表示のとき$\dot{x}$だけで書かれていた$T$が$\dot{q}$と$q$の関数になってしまう．すなわち，式（2.11a）を式（2.4）に入れると，一般座標qによるTの式が得られる．

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N}\sum_{k=1}^{3N}M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{3N}A_j\dot{q}_j+A_0\,; \tag{2.13a}$$

$$M_{jk}\equiv\sum_{i=1}^{3N}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{2.13b}$$

$$A_j\equiv\sum_{i=1}^{3N}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}, \qquad A_0\equiv\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 \tag{2.13c}$$

$M_{jk}(=M_{kj})$，A_j，A_0はqだけの関数である$(j, k=1, 2, \cdots, 3N)$．もちろん，$T>0$であるから，ゼロ質量の質点を含む例外的な場合を除けば，質量行列(M_{jk})は正値対称であり，逆行列M^{-1}が存在する．

$$(M^{-1})_{jk}=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{m_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i} \tag{2.14}$$

式(2.13c)からわかるように，変数変換(2.10)が時間tを陽に

含まなければ，$A_j=A_0=0$ となり，T は $\dot{q}$ の2次形式になる．一方，V は q だけの関数であり，$\dot{q}$ には無関係だ．

さて，L は x と $\dot{x}$ の関数 $L(x, \dot{x}, t)$ であるが，変数変換(2.10)を行えば，q と $\dot{q}$ で書かれたラグランジアンの関数形は $L'(q, \dot{q}, t)=L(x, \dot{x}, t)$ のように変る．これを承知のうえで，簡単のため，L' を再び L と書こう．いま，偏微分の変数変換公式と式(2.12)を使えば，$\partial L/\partial x_i$ と $\partial L/\partial \dot{x}_i$ は，

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i}=\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}$$

となるが，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 q_j}{\partial t\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial^2 q_j}{\partial x_k\partial x_i}\dot{x}_k$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial q_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial q_j}{\partial x_k}\dot{x}_k\right)=\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} \tag{2.15}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\sum_{j=1}^{3N}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i}\right]$$

と書ける。こうして式(2.8)は，

$$\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_i}=0 \tag{2.16}$$

となる．これに仮想変位 δx_i を掛けて i について加えれば，

$$\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0 \tag{2.17}$$

が得られる．ここで，

$$\delta q_j=\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\delta x_i \tag{2.18}$$

を用いた．拘束条件がなければ，$\delta q_j (j=1, 2, \cdots, 3N)$ は互いに独立な仮想変位であり，式(2.17)左辺の係数はゼロでなければならない．すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1, 2, \cdots\cdot, n) \tag{2.19}$$

が成立する（ここでは $n=3N$）．これが一般座標で書いたラグランジュの方程式だ．式(2.8)と見比べれば，変数変換したにもかかわらず，方程式は同じ形をしている．しかも，一般座標変数の選び方はまったく任意であった．したがって，式(2.19)は変数 q を別の一般座標変数 $q'=(q_1', q_2', \cdots\cdot, q_{3N}')$ でおき換えても成立する．事実，式 (2.19) に対して変数変換 $q\to q'$ を実行すれば，上と同様の経過で，まず，

$$\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j}-\frac{\partial L}{\partial q'_j}\right)\frac{\partial q'_j}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.20}$$

となる．q と q' が同等であるためには，$\partial q'_j/\partial q_i$ がつくる行列が逆行列をもつ必要がある（変換 $x\to q$ の場合と同じ）ので，式(2.20)からただちに q を q' でおき換えた式(2.19)が得られる．ラグランジュの方程式の座標変換に対する形不変性はこれで証明された．ラグランジュの方程式の利点はまずこの点にある．なお，変数変換 $q\to q'$ に際してラグランジアンの関数形は $L'(q', \dot{q}', t)=L(q, \dot{q}, t)$ のように変るが，ここでも簡単のため L' を L と書いた．

さて，ラグランジュの方程式を，

$$p_k\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \qquad F_k\equiv\frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{2.21}$$

とおいて書き直せば，

$$\dot{p}_k=F_k \tag{2.22}$$

である．この式を直角座標の式と比べると，ちょうど p_k が運動量，F_k が力の役割をしているかのようだ．その意味で p_k を q_k に**正準共役な一般運動量**（または**一般化運動量**），F_k を q_k についての**一般力**（または**一般化力**）という．普通，式(2.21) 第1式で定義された p_k を正準運動量という場合が多い．しかし，直角座標系で見た（通常の）運動量や力とは一般に次元も内容も異なる．

例題として，本章の冒頭で述べたポテンシャル $V(r)$ をもつ中心力による質量 μ の質点の運動を取り上げよう．そこで述べたような運動平面上の座標変数（$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$）で書けば，ラグランジアン(2.7)は，

$$L=\frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(r)=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r) \quad (2.23)$$

である．式(2.21)によれば，r と θ についての一般運動量と一般力は，

$$p_r=\mu\dot{r},\ p_\theta=\mu r^2\dot{\theta},\ F_r=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}+\mu r\dot{\theta}^2,\ F_\theta=0 \quad (2.24)$$

であり，ラグランジュの方程式(2.19)または式(2.22)の具体形は，

$$\dot{p}_r-F_r=\mu\ddot{r}-\mu r\dot{\theta}^2+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=0, \qquad \dot{p}_\theta=0$$

となる．この場合，一般運動量である p_θ は角運動量だが，一般力である回転力 $F_\theta=\partial L/\partial\theta$ は L が θ を含まないためゼロになった．したがって，p_θ が保存されるが，その値を l とおき $\dot{\theta}$ を l で書けば，この方程式は式(2.2)になる．一般力 F_r には運動エネルギーの r 微分から出てきた $\mu r\dot{\theta}^2=(l^2/\mu r^3)$ が含まれるが，これは遠心力である．一般運動量や一般力とはこのようなものだ．

2.1.2　拘束条件と非保存力がある場合

2.1.1項ではラグランジュの方程式の形不変性を示すため，わざわざ直角座標表示(2.3)から出発したが，式(2.19)を出すだけならば1.5節の結果(1.93)を使う方がはるかに簡単である．そのうえ，式(1.93)は拘束条件や非保存力がある場合でも正しい．拘束条件のある場合の一般論は1.5節の話で尽きている．ただ，一般座標と T または L で書く作業が残っているだけだ．いま，式(1.93)の p_k と F_k に含まれている F'_k に対して定義式(1.91a)，(1.91d)と式(2.5)を使えば，

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}, \qquad F'_k = \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{2.25}$$

であるから，式(1.93)はただちに，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = F_{[k]} + \sum_{a=1}^{K} \lambda_a A_{a,k} \tag{2.26}$$

となる．元来この形の式を**ラグランジュの方程式**といったのである．式(2.19)はこれと区別するため**オイラー-ラグランジュの方程式**という．しかし，ここでは簡単のため，両者を総称してラグランジュの方程式とよびたい．

さて，力 $\boldsymbol{F}_{(i)}$ に対して，一般に，

$$\boldsymbol{F}_{(i)} = -\nabla_{(i)} V + \boldsymbol{Q}_{(i)} \tag{2.27}$$

とおき，$3N$ 次元配位空間における曲線座標基準ベクトル $\boldsymbol{u}_{[k]} = \partial \boldsymbol{r}/\partial q_k$ による共変成分表示（1.5節と同じ），

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_{(i)} V \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k}, \qquad Q_k = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Q}_{(i)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}{\partial q_k} \tag{2.28}$$

を用いれば，式(2.26)は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{a=1}^{K} \lambda_a A_{a,k} \tag{2.29}$$

と書くことができる．この方程式（および式(2.26)）の共変性は共変成分の定義自身によっても明らかであろう．非保存力と拘束条件がなければ，式(2.29)の右辺はゼロであり，この方程式はラグランジュの方程式(2.19)に一致する．

式(1.93)から式(2.26)を導く計算の際に，一般力 F_k が，

$$F_k = F_{[k]} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{2.30}$$

と書けることを知った（式（1.91c),(1.91d)と式(2.25)を見よ）．すなわち，一般力には運動エネルギーの q 依存性からくる右辺第2項が含まれていることに注意していただきたい．これは2.1.1項の末尾の具体例で見た通りである．

さて，拘束条件(1.86)を改めて一般座標で書き直せば，

$$\sum_{k=1}^{3N} A_{a,k}\delta q_k = 0 \tag{2.31a}$$

$$\sum_{k=1}^{3N} A_{a,k}\mathrm{d}q_k + A_{a(0)}\mathrm{d}t = 0 \tag{2.31b}$$

または，

$$\sum_{k=1}^{3N} A_{a,k}\dot{q}_k + A_{a(0)} = 0 \tag{2.31c}$$

である（いずれも，$a=1, 2, \cdots\cdot, K$）．この拘束条件問題にとってダランベールの原理は，$Q_k=0$ ならば式(2.17)であり，$Q_k \neq 0$ ならば，

$$\sum_{k=1}^{3N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0 \tag{2.32}$$

となる．1.5節と同様の議論によって，K個のラグランジュの未定乗数 $\lambda_a(a=1, 2, \cdots\cdot, K)$ をもつ一般拘束力 $\sum_{a=1}^{K}\lambda_a A_{a,k}$ を導入すれば，式(2.32)から式(2.29)が得られるのは明らかだ．もちろん，この場合は式(2.29)に式(2.31c)を連立させて解かなければならない．内容的には式(1.93)と式(1.94)の連立とまったく同等である．

ホロノーム型拘束条件の場合に話を限ろう．この場合 $A_{a,k} = \partial G_a/\partial q_k$ だから(式(1.95)参照)，式(2.29)の一般拘束力の項は，L を，

$$L \longrightarrow L' \equiv L + \sum_{a=1}^{K}\lambda_a G_a \tag{2.33}$$

のように L' でおき換えれば，新しいラグランジアン L' の中に吸収することができる．そして，式(2.29)は見掛けは拘束力項のない形のラグランジュの方程式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = Q_k \qquad (k=1, 2, \cdots\cdot, 3N) \tag{2.34a}$$

に変身する．ここでは，$\partial L'/\partial \dot{q}_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ を用いた．一般拘束力が q だけの関数だからである．こうして，ホロノーム型の拘束条件問題は，ラグランジアンの中に式(2.33)のような付加項を導入することによって，見掛け上通常型のラグランジ

ュの方程式の問題に帰着させることができた．ただし，変数は $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{3N}$ と $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_K$ の $3N+K$ 個に拡大されており，あらたに，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_a}-\frac{\partial L'}{\partial \lambda_a}=0 \qquad (a=1,2,\cdots\cdots,K) \tag{2.34b}$$

を要求する必要がある．L' は $\dot{\lambda}_a$ を含まないので，$\partial L'/\partial\dot{\lambda}_a=0$ であり，式(2.34b)は $\partial L'/\partial\lambda_a=0$ となるが，これは拘束条件 $G_a=0$ にほかならない．一方，非ホロノーム型の拘束条件はラグランジアンの中に吸収して扱うことはできない．この相違点はしっかりと記憶しておいてほしい．

ホロノーム型の場合，一般座標の $k=n+1$ 番目から $k=3N$ 番目までを式(1.99)のように選べば，その番号の仮想変位はゼロとなり他の仮想変位は独立であるから，$Q_k=0$ の場合，式(2.17)からただちにラグランジュの方程式(2.19)が得られる．ただし，今度は $n=3N-K$ である．同じ場合，$A_{a,k}=\delta_{k,n+a}$ を式(2.29)に代入して，$k=(1,2,\cdots\cdots,n)$ と $k=(n+1,\cdots\cdots,3N)$ の場合に分ければ，前者は式(2.19)となり，後者は，

$$\lambda_a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{n+a}}-\frac{\partial L}{\partial q_{n+a}} \qquad (a=1,2,\cdots\cdots,K) \tag{2.35}$$

を与える．いまの場合，式(2.19)は式(1.101)そのものであり，式(2.35)は式(1.102)にほかならない．

次に，非保存力 Q_k（式(2.27)の第2式）が q と $\dot{q}$ の関数 U によって，

$$Q_k=-\frac{\partial U}{\partial q_k}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \tag{2.36}$$

と書ける特殊な場合を考えよう．拘束条件はないものとする．このとき，

$$L'\equiv L-U \tag{2.37}$$

とおいて新しいラグランジアン L' を導入すれば，式(2.19)と同形の方程式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L'}{\partial q_k}=0 \tag{2.38}$$

が成立する．ホロノーム型拘束力の場合に似ているが，この場合は付加項 U が位置座標ばかりでなく速度に依存する場合も含まれている．L' もラグランジアンという．後で述べる電磁場中の荷電粒子の運動はそのようなラグランジアンによって記述される．なお，拘束条件があるときは式(2.38)の右辺に一般拘束力の項 $\sum_{a=1}^{K}\lambda_a A_{a,k}$ をおく必要がある．拘束条件がホロノーム型であれば，式(2.33)と同じ項 $\sum_{a=1}^{K}\lambda_a G_a$ をラグランジアンに加えておけばよい．今後特に必要のある場合を除き，L' を含めて単に L と書くことにしよう．

2.1.3　ラグランジュの立場

いままでは，私たちはニュートンの方程式(2.1)（または式(2.3)）からラグランジュの方程式に至る道をたどってきた．1.1節で述べたように，力学系のモデルは，基本的な構成要素と力を整理・簡単化して質点系を設定することによって，確定した．ニュートンの立場は，力を基本的な量とし，ニュートンの運動方程式を出発点とする理論体系であった．これから，私たちはラグランジアンを力よりも基本的な量とし，ラグランジアンの設定を理論構成の出発点とする**ラグランジュの立場**に移行する．2.1.1，2.1.2項で見てきたように，ラグランジアンを与えれば，2次的な量として（一般）運動量と（一般）力とが定義され，それによって運動方程式をおくことができる．ラグランジュの立場では，力学系のモデルは整理された構成要素と一般座標 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ および一般速度 $\dot{q}=(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$ の関数であるラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ を与えることによって確定する．この立場では，力学変数として $(q, \dot{q})$ の組合せを選んだということに留意してほしい．これを**ラグランジュ変数**ということがある．後で導入するハルミトンの立場では，別の組合せを用いる（1.3節の議論も参考にしていただ

きたい)．$L(q, \dot{q}, t)$ の関数形は問題によって違うが，式(2.37)の場合を含めて考慮すれば，いつも式(2.7)のように $L=T-V$ と書けるとは限らない．この点はしばしば初学者の誤解を招くところなので，注意しておきたい．なお，L が $\dot{q}$ 以上の高階時間微分を含む場合の取扱いは2.2.3項で議論する．

ラグランジュの立場から改めて保存則と保存量の存在について考えよう．いま，ラグランジアンが一つまたは複数個の特定の一般座標 q_k を含んでいなかったとすれば，式(2.21)によって q_k についての一般力 F_k はゼロとなり，式(2.22)によって q_k に正準共役な運動量 p_k は一定となって保存される．一般に，ラグランジアンに含まれていない特定の座標変数を**循環座標**という．すなわち，循環座標に共役な運動量は保存量となり，保存則が現れる．この場合，$F_k=\partial L/\partial q_k=0$ からわかるように，変数 q_k の値を変化させる変換に対してはラグランジアン L は不変に保たれるはずだ．逆に，L がある変換に対して不変性または対称性をもっているとすれば，その変換によって値が増減する変数は循環座標となるので，それに正準共役な運動量は保存される．なお，循環座標の一般速度 $\dot{q}_k$ を消去しラグランジアンを他の一般座標と一般速度で書いておく方法がある（章末問題)．

このように，ラグランジュの立場は保存則とその成立の由来を見るには便利である．繰り返しになるが，保存則の背景を一般的に見ておきたい．いま，

$$q_j \longrightarrow q_j'=q_j+\delta q_j; \qquad \delta q_j=\varepsilon g_j(q, t) \tag{2.39}$$

という無限小変換に際してラグランジアン L が不変であったとしよう（ε は微小量)．このとき，対応する L の変化は，

$$\begin{aligned}\delta L &\equiv L(q', \dot{q}', t)-L(q, \dot{q}, t)\\ &=\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right)\\ &=\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\end{aligned} \tag{2.40}$$

となるが，これがゼロであるはずだから（$\delta L=0$），保存則，

$$O\equiv\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}g_j(q,t)=\text{一定} \tag{2.41}$$

が成立する．ただし，式(2.40)の第2段には $\delta\dot{q}_j=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\delta q_j$ を入れ，第3段ではラグランジュの方程式を用いた．変換(2.39)に際してのラグランジアンの不変性による保存則(2.41)の成立を**ネーターの定理**という．

いま，一つの q_k が循環座標であるとすれば，その無限小変化は式(2.39)においては $g_j=\delta_{jk}$ となるので，式(2.41)の与える保存量は $O=p_k$ である．この結果はすでに述べたところだ．また，V（または L）が質点の相対距離だけに依存する場合は，位置座標の平行移動に対して L は不変である．そこで全質点の $\boldsymbol{n}$ 方向（$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトル）への一様な無限小平行移動 $\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=\varepsilon\boldsymbol{n}$（これが式(2.39)であるが，$g_j$ はすべての質点に対して同じ $\boldsymbol{n}$ の座標成分となる）をとれば，ネーターの定理は全運動量の $\boldsymbol{n}$ 方向成分 $P_n=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}=\boldsymbol{n}\cdot\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}$ の保存則を与える．全角運動量の $\boldsymbol{n}$ 方向成分の保存則は，その方向を軸とする一様な無限小回転に対するラグランジアンの不変性に基づくネーターの定理から出てくる．すなわち，この無限小回転を $\delta\boldsymbol{\theta}=\varepsilon\boldsymbol{n}$ とすれば，それによる変位は $\delta\boldsymbol{r}_{(i)}=\varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_{(i)}$ となるので，ネーターの定理による保存量は $L_n=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{n}\cdot\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}\times\boldsymbol{p}_{(i)}$ となるわけだ．詳しい計算は読者にまかせよう．ニュートンの立場で保存則をこのような一般的定理の形式で表すことは容易ではない．

エネルギー保存則については，多少の補足が必要かも知れない．ニュートンの立場では，保存力に対する運動方程式を積分して初めて $T+V$ という力学的エネルギーの概念とその保存則に到達したのであった（1.3.2項）．ラグランジュの立場では，まだラグランジアンを使ってエネルギーという量を定義してはいない．ここでその定義を与えよう．ラグランジュの立場では，保存量をめぐる議論の基礎はやはりネーターの定理にあ

る．式(2.39)の無限小変換が現実の運動による座標変数の時間的変化であったとすれば，$\delta q_j=\dot{q}_j\mathrm{d}t$ であるから，$\varepsilon=\mathrm{d}t$，$g_j=\dot{q}_j$ とおけばよい．さらに，L が q と $\dot{q}$ を通す以外に陽に時間 t に依存している可能性を考慮すれば，$\delta L\equiv L(q',\dot{q}',t+\mathrm{d}t)-L(q,\dot{q},t)$ であるから，式(2.40)の右辺には $(\partial L/\partial t)\mathrm{d}t$ を加えておかなければならない．このとき，$\delta L=(\mathrm{d}L/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$ であり，式(2.40)は，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \tag{2.42}$$

となるので，新しい量 H を，

$$H\equiv\sum_{j=1}^{3N}p_j\dot{q}_j-L \tag{2.43}$$

と定義してもち込めば ($p_j=\partial L/\partial\dot{q}_j$ に注意)，式(2.42)は，

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.44}$$

を与える．したがって，ラグランジアンが時間 t を陽に含まなければ，すなわち，時間原点の移動に対して L が不変であれば，$\partial L/\partial t=0$ となり，量 H が保存される．この場合，保存量は L ではなくて H であることに注意してほしい．ラグランジュの立場では H をエネルギーと定義するのである．

エネルギーが保存される場合に，ニュートンの立場のエネルギー $T+V$ とこの H との関係を調べよう．このとき，$L=T-V$ であり，V は時間を陽に含まない．一方，ラグランジュの立場のエネルギー H が保存され，L は t を陽に含まない．これは変数変換(2.10)が t を陽に含まないことからきている．この場合，運動エネルギー T は $\dot{q}$ の2次形式であるから（式(2.13)では $A_i=A_0=0$)，式(2.43)の右辺第1項は $\sum_{j=1}^{3N}p_j\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{3N}(\partial T/\partial\dot{q}_j)\,\dot{q}_j=2T$ となり，ただちに $H=2T-(T-V)=T+V$ を与える．これは，ラグランジュの立場で定義した H が，この場合（$L=T-V$ の場合）には，ニュートンの立場のエネルギー $T+V$ になることを意味している．これで両者

の間の調整がついた．ラグランジュの立場で定義したエネルギー H はニュートンの立場から見ても受け入れることのできる量であった．しかし，$L \neq T-V$ の場合はどうか？　この場合，ニュートンの立場ではエネルギーをどう定義してよいか一般にはわからない．ラグランジュの立場では，ラグランジアンが定義されている限り，式(2.43)によってエネルギーを定義することができ，それは $\partial L/\partial t=0$ であれば保存する．荷電粒子を含む力学系が電磁場中にあるときのエネルギーはまさに式(2.43)によって与えられるが，詳しくは後で議論しよう．

なお，ラグランジュの立場で定義したエネルギー H はこの立場の力学変数 q と $\dot{q}$ の関数である．この点，正準変数 q，p を力学変数とするハミルトンの立場におけるエネルギー関数であるハミルトニアンとは違う．理論体系上無視できない相違点だが，それは次節で詳論しよう．

最後に，解析力学の理論体系の基盤ともいうべきこのラグランジアンの物理的意味は何か，という疑問が残る．この問題の解明も後の仕事である．

2.2　ハミルトンの正準方程式とポアッソンかっこ式

この節では，ラグランジュの立場からハミルトンの立場に移行して力学の理論体系を整備する．ハミルトンの立場では，力学変数として正準変数の組（q, p）を選び，ラグランジュの方程式を書き直してハミルトンの正準方程式を導く．ラグランジアンの代りにハミルトニアンが登場するが，これは前節で（q, $\dot{q}$）の関数として定義したエネルギー H を（q, p）の関数として書き直したものである．ハミルトニアン $H(q, p, t)$ は，もちろん，エネルギーを表す力学量であるが，同時に力学系の時間的発展を生成する演算子という役割を担う．その機構を見るためにはポアッソンかっこ式が便利である．

2.2.1 ハミルトニアンとハミルトンの正準方程式

ラグランジュの立場からハミルトンの立場に移行するには，まず，変数の組 $(q, \dot{q})$ を正準変数の組 (q, p) に変換しなければならない．q_k に正準共役な運動量 p_k は式(2.21)の第1式で定義されていたが，これは p_k を $(q, \dot{q})$ の関数として表した式，

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q_1, \cdots, q_n ; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n ; t) \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{2.45}$$

を与える．特に断わらないときは $n=3N$ である．この n 個の式を n 個の変数 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ に対する方程式と見なして解き，$\dot{q}$ を q と p の関数として，

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n ; t) \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{2.46}$$

のように表したい．これが可能であるための条件は，

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0 \tag{2.47}$$

である．このとき，変数変換$(q, \dot{q}) \to (q, p)$が成立し，式(2.43)で定義されたエネルギー関数 H は，

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \tag{2.48}$$

のように正準変数(q, p)の関数として書くことができる．これを**ハミルトニアン**という．$(q, \dot{q})$で表したエネルギーをハミルトニアンとよぶことはない．なお，変換$(q, \dot{q}, L) \to (q, p, H)$を**ルジャンドル変換**という．なお，特定の番号 j の p_j の式(2.45)が $\dot{q}_j$ に依存しないとき，$\dot{q}_j$ を式(2.46)のように (q, p) の関数として書くことはできない．条件(2.47)が成立しないとき，すなわち，$\det(\partial^2 L/\partial q_i \partial q_j)=0$ の場合，ルジャンドル変換は不可能だ．この式は一種の拘束条件として働き独立変数の数を減らす．とうぶんの間，ルジャンドル変換が可能な場合だけを取り扱う．不可能な場合は7章で議論する．

これからは，$(q, \dot{q})$ を独立変数の組として行う（ラグランジュの立場の）偏微分を添字 L で表し，(q, p) を独立変数として扱った（ハミルトンの立場の）偏微分を添字 H によって区別しよう．まず，ハミルトンの立場で H を p_k で偏微分する．このとき，式(2.48)を用いるが，右辺に含まれる $\dot{q}$ の p 依存性についても微分しなければならない．偏微分の公式を注意深く適用すれば，

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)_H = \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}\right)_H - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_L \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}\right)_H = \dot{q}_k \tag{2.49a}$$

となる．第2項と第3項の相殺は $p_i = (\partial L/\partial \dot{q}_i)_L$ によって明らかだろう．次に，ハミルトンの立場で H を q_k について偏微分すれば，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_H &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}\right)_H - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_L - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_L \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}\right)_H \\ &= -\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_L \end{aligned} \tag{2.49b}$$

が得られる．式(2.48)右辺の $\dot{q}$ の q 依存性についても微分した．式(2.49b)は一般力に対する式，

$$F_k = \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_L = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_H \tag{2.50}$$

を与えたわけだ．こうして，**ハミルトンの正準方程式**，

$$\dot{q}_k = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)_H \tag{2.51a}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\dot{p}_k = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_H \tag{2.51b}$$

が導かれた．**ハミルトンの方程式**ということもある．式(2.51a)は式(2.49a)そのものであり，式(2.51b)は一般力をハミルトニアンで書き直したラグランジュの方程式にほかならない．

以上は質点系が式(2.37)の場合も含めてラグランジアンで記述されるときの話であった．式(2.37)の形に書けない非保存力 Q_k と拘束条件(2.31)のある場合，式(2.51b)は，

$$\dot{p}_k=-\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_H+Q_k+\sum_{a=1}^{K}\lambda_a A_{a,k} \tag{2.51c}$$

となり，式(2.31c)を連立させて解くことになる．いずれも形不変の形式をもち，一般座標の変換に際して共変的である．

簡単な力学系についてハミルトニアンとハミルトンの正準方程式を見ておこう．保存力の場合，すなわち，ラグランジアンが質点の位置座標だけの関数であるポテンシャル V によって式(2.7)のように書かれる場合，x_i に正準共役な運動量としてニュートンの運動量 p_{x_i} が得られ，x_i についての一般力として通常の力 F_{x_i} が得られる(式 (2.9)および式(2.5)などを見よ)．式(2.46)は，

$$\dot{x}_i=\frac{1}{m_i}p_{x_i} \tag{2.52}$$

であり，これと式 (2.48) によってハミルトニアンを求めれば，

$$H=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{(i)}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}-L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}\boldsymbol{p}_{(i)}{}^2+V \tag{2.53}$$

が出てくる．これは運動量で書いたエネルギーの式 $T+V$ であり，当然の結果だ．式(2.53)と式 (2.51a)，(2.51b)によってハミルトンの正準方程式をつくれば，ニュートンの方程式(2.3) または式 (1.18)にもどる．次に，中心力場 $V(r)$ 中の質量 μ の質点の運動を取り上げよう．ラグランジアンは式(2.3) または式 (1.18)にもどる．次に，中心力場 $V(r)$ 中の運動量 p_r，p_θ と一般力 F_r，F_θ はすでに式(2.24)で求めていた($\dot{r}=\mu^{-1}p_r$，$\dot{\theta}=(\mu r^2)^{-1}p_\theta$)．こうして，ハミルトニアンは，

$$H=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{1}{2\mu}p_r{}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}+V(r) \tag{2.54}$$

となり，式(2.51a)，(2.51b)が与える正準方程式として式(2.2)を得る．l は p_θ の値 (一定) である．いずれも $L=T-V$，$H=T+V$ であるが，式(2.37)の場合は違う．3章で

その重要な例を見る．

保存量と保存則の存在については，式(2.50)と式(2.51)を見ればわかるように，ラグランジュの立場とまったく同じように議論することができるが，中心的な役割はラグランジアン L ではなくてハミルトニアン H が受けもつ．すなわち，H がある変換に際して不変であれば，それに対応する保存量と保存則が存在する．例えば，ある特定の一般座標 q_k が循環座標であれば（つまり，H がその q_k に依存しなければ)，式（2.50）によって $F_k=0$ であり，式(2.51b)によって q_k に正準共役な運動量 p_k が一定となるというわけだ．2.1節と同様な議論をハミルトンの立場で繰り返すことは容易である．例えば，式(2.44)を式(2.48)によってハミルトンの立場に移せば，

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_L=\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_H \tag{2.55}$$

が得られる．すなわち，ハミルトニアンが時間変数 t を陽に含まず時間原点の移動に対して不変ならば，エネルギーは保存される．ここでも H はラグランジュの立場における L と同等の役割を演じている．まとめて書いておこう．

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_H=0 \qquad \text{ならば} \qquad p_k=\text{一定} \tag{2.56a}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_H=0 \qquad \text{ならば} \qquad H=\text{一定} \tag{2.56b}$$

この形で比べると，ハミルトニアン（エネルギー）は時間変数を一般座標と見なしたときのそれに正準共役な運動量であるかのように見える．この対応関係はこれからもしばしば現れる．

さて，ラグランジュ・ハミルトンの立場における理論構成の手続きを再考しておこう．この立場では，力学系のモデルはまずラグランジアンを力学変数（$q, \dot{q}$）の関数として与えることによって確定する．ラグランジュの立場では，これからただちにラグランジュの方程式をたてて，それを解く作業に入った．ハミルトンの立場では，力学変数として正準変数の組（q,

p) を選び，ハミルトニアンを導入して，ハミルトンの正準方程式を設定する．もちろん，ラグランジアンを経由せずに直接ハミルトニアンを与えてモデルを設定し，そこからハミルトンの立場の力学を出発させてもよい．他方，ニュートンの立場があった（1章）．このように，私たちはニュートンの立場，ラグランジュの立場，ハミルトンの立場のどれかを選ぶことができる．三つの立場におけるモデル作りと運動方程式の設定方式を比べて表にすれば，表2.1の通りである．

表2.1

	ニュートンの立場	ラグランジュの立場	ハミルトンの立場
モデル作り	構成要素の整理 力の設定	構成要素の整理 ラグランジアンの設定 正準運動量と一般力の導出 ルジャンドル変換⟶	構成要素の整理 ハミルトニアンの導出
運動方程式	ニュートンの方程式	ラグランジュの方程式	ハミルトンの正準方程式

最後に解くべき運動方程式はどの立場からつくっても，具体的には，結局同じものになる．ではなぜ，面倒な手続きを経てハミルトンの立場までもってくるのか？　ニュートンの立場に対するラグランジュの立場の優位性については，ラグランジュの方程式の形不変性や保存則成立の基盤に関する一般論を通してすでに詳しく見てきた．同じことはハミルトンの立場についてもいえる．では，ラグランジュの立場に対するハミルトンの立場の優位性は何か？　それは主に力学量の時間的発展の記述にあるが，詳しくは次節から順次勉強して行くことになる．ラグランジュ•ハミルトンの立場の理論構成を力学の**正準形式**という．なお，ニュートンの立場の運動方程式があってもラグランジアンだけで表し切れない場合もあるし，ラグランジアンがあってもただちにハミルトンの立場に移行できない場合もあるということは記憶しておいてほしい．

なお，ラグランジアンやハミルトニアンに定数項を付加しても運動方程式は変らない．この定数はエネルギー原点を移動させるだけである．

2.2.2 相空間とリウビルの定理

ハミルトンの正準方程式（2.51a），（2.51b）を微小時間区間 $(t, t+\delta t)$ について積分すると（微小量 δt の2次以上の項を無視すれば），

$$q_k(t+\delta t)=q_k(t)+\delta t\frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{2.57a}$$

$$(k=1, 2, \cdots, n)$$

$$p_k(t+\delta t)=p_k(t)-\delta t\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{2.57b}$$

という関係式が得られる（添字 H は省略した）．これは力学変数 (q, p) の時刻 t での値と次の時刻 $t+\delta t$ での値との関係を与える式だ．すなわち，時刻 t における (q, p) の値を指定したとき，時刻 $t+\delta t$ における (q, p) の値を**一義的に**決めるものが時刻 t での $\partial H/\partial p_k$ と $\partial H/\partial q_k$ である．式(2.51)が運動方程式であるから，当然の結果だが，式(2.57)は運動による力学変数の時間的発展を支配する主役がハミルトニアンであることを明示している．これが (q, p) の関数として書いたハミルトニアン H の重要な役割である．エネルギーを表す力学量というだけではないのだ．これがラグランジュの立場からハミルトンの立場に移行したことによる一つの重要な収穫である．この点については，次の2.2.3項でポアッソンかっこ式を用いて再び議論する予定だ．

さて，1.3節で述べたように，運動状態の記述には相空間が便利であった．一般座標を使った場合，相空間は $2n$ 個の変数 (q, p) を座標軸としてもつ $2n$ 次元のユークリッド空間である．質点の数を N とすれば $n=3N$ であるが，K 個の拘束条件があれば $n=3N-K$ となる．1.3節と同じように，q がつくる n 次元の部分空間を配位空間，p がつくる n 次元の部分

空間を運動量空間という．力学系の運動状態を表す相空間内の1点は代表点とよばれたわけだが，読者はすでに代表点の運動に関して，流線が交差しないこと（解の一義性），代表点の集合がつくる閉領域の体積が一定であること（リウビルの定理(1.19)）を知っている．ここではリウビルの定理の一般的な証明を与えよう．

時刻 t における相空間内の一つの閉領域 Γ_t はその中に含まれる代表点の時刻 t からの時刻 t' への運動に応じて移動し変形して $\Gamma_{t'}$ となる．それぞれの領域の体積を $\Omega(\Gamma_t)$，$\Omega(\Gamma_{t'})$ とすれば，リウビルの定理は，

$$\Omega(\Gamma_t)=\Omega(\Gamma_{t'}) \tag{2.58}$$

の成立をいうものである．ただし，

$$\Omega(\Gamma_t)=\int\underset{\Gamma_t}{\cdots}\int\prod_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k \tag{2.59}$$

ここでは $q_k=q_k(t)$，$p_k=p_k(t)$ が積分変数である．式(2.58)を証明するためには，$t'=t+\delta t$ とおいて，無限小時間区間内の運動による変動を考えれば十分である（δt は微小量）．$\Omega(\Gamma_t)=\Omega(\Gamma_{t+\delta t})$ が証明されれば，それを積み重ねて有限時間間隔の変動に対する式(2.58)に到達できるからだ．さて，$q_k'=q_k(t+\delta t)$，$p_k'=p_k(t+\delta t)$ とおけば，

$$\begin{aligned}\Omega(\Gamma_{t+\delta t})&=\int\underset{\Gamma_{t'}}{\cdots}\int\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i'\mathrm{d}p_i'\\&=\int\underset{\Gamma_t}{\cdots}\int\frac{\partial(q_1',p_1',\cdots,q_n',p_n')}{\partial(q_1,p_1,\cdots,q_n,p_n)}\prod_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k\end{aligned} \tag{2.60}$$

である．ここで式(2.57)が与える式，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}=\delta_{ik}+\delta t\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{\partial q_i'}{\partial p_k}=\delta t\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p_i}\\&\frac{\partial p_i'}{\partial q_k}=-\delta t\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad \frac{\partial p_i'}{\partial p_k}=\delta_{ik}-\delta t\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned} \tag{2.61}$$

を使えば，変数変換$(q,p)\to(q',p')$のヤコビアンは，

$$\frac{\partial(q',p')}{\partial(q,p)}=1+\sum_{k=1}^{n}\delta t\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)=1 \qquad (2.62)$$

となるので（$(\delta t)^2$の項は無視した），$\Omega(\Gamma_t)=\Omega(\Gamma_{t+\delta t})$が得られる．証明終り．リウビルの定理は5章でもう一度取り上げる．

相空間の簡単な例としては，すでに1.3項で1次元自由粒子（図1.9）や1次元調和振動子（図1.11）の場合を見てきた．もう少し知見を広げるため，ここでは1.5.3項で議論した単振子（質量m）の鉛直面内における運動の相空間を見ておこう．糸のたわみの問題を避けるため，糸を質量ゼロの細い剛体棒でおき換えておく．よい機会だから，正準形式を使って話を進めよう．座標変数その他を図1.15のように選べば，ラグランジアンは$L=(m/2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$であるが，拘束条件$r=r_0$のある運動だから，独立変数としては$\theta$をとるのが便利であり，有効ラグランジアンは$L=(1/2)mr_0^2\dot{\theta}^2+mgr_0\cos\theta$となる．$\theta$に正準共役な運動量は$p_\theta=\partial L/\partial\dot{\theta}=mr_0^2\dot{\theta}$だから，ルジャンドル変換$\dot{\theta}=p_\theta/mr_0^2$と式(2.48)によってハミルトニアン，

$$H=p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{p_\theta^2}{2mr_0^2}-mgr_0\cos\theta \qquad (2.63)$$

が得られる．明らかに$\partial H/\partial t=0$である．したがって，エネルギー保存則$H=E$が成立し，エネルギー定数Eを与えれば，次式によってp_θが求められる．

$$p_\theta=\pm\sqrt{2mr_0^2(E+mgr_0\cos\theta)} \qquad (2.64)$$

この場合，ポテンシャル$V=-mgr_0\cos\theta$およびθとp_θがつくる相空間は，それぞれ，図2.1(a)，2.1(b)のようになる．エネルギー定数Eのとる値E_1，E_2，E_3に応じて，相空間上の流線が変る．E_1のときθは$-\theta_0$と$+\theta_0$の間を往復する振動運動を行う．θ_0は$E_1+mgr_0\cos\theta_0=0$の解であり，転回点とよばれる．$E_2=mgr_0$の場合はθは$\pm\pi$（またはその奇数倍）

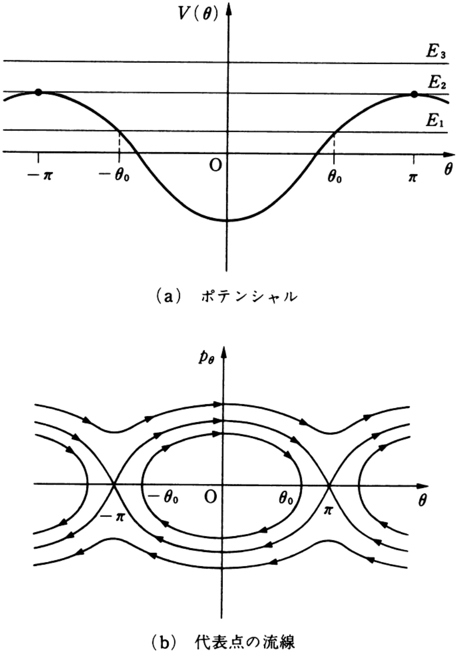


図 2.1 単振子の相空間

まで行くが，そこで速度がゼロとなって静止する．その点は明らかに不安定平衡点であり，不安定平衡点上の静止である．相空間上では，この点で流線が交差しているように見え，あたかも相空間上の流線が交差しないという定理に違反しているかのようだ．しかし，流線はその点では連続ではなく，途切れている．ごくわずかな力が加えられた場合に限って，その力の方向に運動を再開して次の不安定平衡点まで行く．決して上記の定理に矛盾しているわけではない．$E_3>E_2$ のとき，振子は振動せず，支点 O を中心とする回転運動が始まる．これも周期運動である．この例でわかるように，周期運動には 2 種類ある．一つは相空間上の流線（一般的にはそのある部分空間への射

影）が閉曲線をつくるものであり，もう一つは波型の周期的軌跡をつくるものである．単純な振動である前者と区別して，後者を回転運動という．回転運動の場合でも，変数を適当に選べば相空間上の軌跡が閉曲線をつくるようにできる．

2.2.3　ポアッソンかっこ式

一般に力学量は正準力学変数（q, p）の関数として書くことができる．すなわち，力学量を F とすると，

$$F=F(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots p_n ; t) \tag{2.65}$$

である．簡単に $F=F(q, p, t)$ と書くこともある．力学量 F の時間的変化を調べるため，時間変数 t について微分しよう．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)\\&=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\end{aligned} \tag{2.66}$$

最後の行への移行に際してはハミルトンの正準方程式を用いた．F は任意であり，どんな力学量の時間的変化でも，式(2.66)の形に書くことができるので，右辺第2項を簡単な記号で表すことにしたい．そこで2個の力学量 $u(q, p, t)$ と $v(q, p, t)$ に対する**ポアッソンかっこ式** $\{u, v\}$ を，

$$\{u, v\}\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k}-\frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}\right) \tag{2.67}$$

によって定義しよう．このポアッソンかっこ式を使えば，式(2.66)は，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F, H\} \tag{2.68}$$

のように書くことができる．これはポアッソンかっこ式で表した力学量 F の運動方程式である．F として q_k と p_k をとれば，式(2.68)は，

$$\dot{q}_k=\{q_k, H\}, \quad \dot{p}_k=\{p_k, H\} \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{2.69}$$

となるが，これはハミルトンの正準方程式にほかならない．し

かし，式(2.51a)，(2.51b)では符号の付き方が不ぞろいだったのに比べて，式(2.69)はまったく同じ形をしている．対称美を尊重する人にはこの点が気に入るだろう．

今後のために，ポアッソンかっこ式の一般的性質を列挙しておこう．u, v, w を力学量，a, b を定数とすると，次の恒等式が成立する．

$$\{u, v\}=-\{v, u\} \tag{2.70 a}$$

$$\{u, u\}=0 \tag{2.70 b}$$

$$\{u, a\}=0 \tag{2.70 c}$$

$$\{au+bv, w\}=a\{u, w\}+b\{v, w\} \tag{2.70 d}$$

$$\{uv, w\}=u\{v, w\}+\{u, w\}v \tag{2.70 e}$$

$$\{u, vw\}=\{u, v\}w+v\{u, w\} \tag{2.70 f}$$

$$\{u, \{v, w\}\}+\{v, \{w, u\}\}+\{w, \{u, v\}\}=0 \tag{2.70 g}$$

特に式(2.70g)を**ヤコビの恒等式**という．証明はいずれも簡単である．読者自ら試みていただきたい．なお，定義式(2.67)の微分を行う変数が正準変数の組（q, p）であることを明記するため，$\{u, v\}_{qp}$ と書くこともある．しかし，5章で証明するように，ポアッソンかっこ式は正準変数の取り替え（正準変換）に際して不変であり，どんな正準変数で表しても変らない．したがって，実は使った変数を付記する必要はないのである．

正準変数自身に対するポアッソンかっこ式を式(2.67)によって計算すると，

$$\{q_i, q_j\}=0, \quad \{p_i, p_j\}=0, \quad \{q_i, p_j\}=\delta_{ij} \tag{2.71}$$

となる．この証明もまったく簡単である．式(2.71)は正準変数が満足すべき重要な関係式であり，後で何回か登場するので覚えておいてほしい．

さて，式（2.68）にもどろう．話を簡単にするため，F は(q, p)を通す以外には時間変数 t に依存しないものとしよう．すなわち，$\partial F/\partial t=0$とする．このとき，F の運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\{F, H\} \tag{2.72}$$

となるので，時刻 t から時刻 $t+\delta t$ までの無限小時間（δt は微小量)の運動による F の変化は($(\delta t)^2$ の項を無視すれば)，

$$F_{t+\delta t}=F_t+\delta t\{F, H\}_t \tag{2.73}$$

によって与えられる．すなわち，時刻 t で F とハミルトニアン H とのポアッソンかっこ式 $\{F, H\}$ を与えれば，次の時刻 $t+\delta t$ での F の値がわかる．これを繰り返し適用すれば，有限時間の運動による力学量の変化が求められる．このように，ハミルトニアンは力学系の時間発展をつくり出す生成演算子という基本的役割を担っている．この役割についてはすでに正準変数の時間的発展に関連して述べておいたが（2.2.1 項)，今回は任意の力学量についても直接成立することが示されたのである．ポアッソンかっこ式の効用だ．なお，

$$\hat{L}F=\{F, H\}; \qquad \hat{L}\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\right) \tag{2.74}$$

によって定義される線形演算子（リウビル演算子）$\hat{L}$ を導入すれば，運動方程式(2.72)は，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\hat{L}F \tag{2.75}$$

となる．H が（したがって，$\hat{L}$ が)，時間 t に陽に依存していないとき，初期時刻 t_0 における初期値 F_0 に対する式(2.75)の初期値問題の形式解は，

$$F_t=\exp[(t-t_0)\hat{L}]F_0 \tag{2.76}$$

である．式(2.75)は式(2.72)とまったく同じものであり，実質的には何も変っていない．しかし，式(2.76)の形に書けば，$\hat{L}$（したがって，H）が時間発展の生成演算子であることがはっきりしよう．

いま，ハミルトニアンが時間発展の生成演算子であることを強調したが，さらに正準力学変数自身も別の変換の生成演算子になっていることを示そう．ポアッソンかっこ式の定義(2.67)

において，$u=F$，$v=p_k$ とおけば，ただちに，

$$\frac{\partial F}{\partial q_k}=\{F, p_k\} \tag{2.77}$$

が得られる．したがって，特定の一般座標 q_k の値の微小変化 $q_k\to q_k+\delta q_k$ に対応する力学量 F の変化は（$((\delta q_k)^2$ の項を無視すれば)，

$$F(q_k+\delta q_k)=F(q_k)+\delta q_k\{F, p_k\} \tag{2.78}$$

によって与えられる（q_k 以外の依存性は省略した）．すなわち，q_k に正準共役な運動量 p_k は q_k の値の微小変化に対応する力学量の変化を引き起す生成演算子である．正準運動量にはこのような役割があった．式(2.77)および式(2.78)と式(2.72)および式(2.73)とを見比べれば，明らかに $t\to q_k$，$H\to p_k$ という対応が存在する．5章では，一般座標として時間変数をとり，それに正準共役な運動量としてハミルトニアン（エネルギー）を扱う可能性について議論する予定だ．

一方，式(2.67)において，$u=q_k$，$v=F$ とおけば，

$$\frac{\partial F}{\partial p_k}=\{q_k, F\} \tag{2.79}$$

が得られる．したがって，特定の一般運動量の微小変化 $p_k\to p_k+\delta p_k$ に対応する力学量 F の変化として（$((\delta p_k)^2$ の項を無視すれば)，

$$F(p_k+\delta p_k)=F(p_k)+\delta p_k\{q_k, F\} \tag{2.80}$$

が成立する（p_k 以外の依存性は省略した）．q_k はそれに正準共役な運動量の値の微小変化に対応する力学量の変化を引き起す生成演算子である．q と p は互いに相手の値の変化を与える生成演算子という間柄にあったわけだ．ハミルトンの立場では一般座標と一般運動量の役割はまったく対称的かつ同等である．実際，5章では q と p を交換する正準変換，すなわち，p を一般座標に q をそれに正準共役な運動量に移す正準変換があることを学ぶ．ハミルトニアンや正準変数のこのような役割を知ることが正準形式に移行した利点の一つである．

この事実を知ったうえで，もう一度保存則について議論しておきたい．まず，力学量 F が保存されるための条件を調べよう．式(2.68)によれば，$\mathrm{d}F/\mathrm{d}t=0$ のためには，

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\{F, H\}=0 \tag{2.81}$$

が成立しなければならないが，F が時間変数に陽に依存していない場合は，

$$\{F, H\}=0 \tag{2.82}$$

がその条件である．例えば，特定の運動量 p_k が保存されるためには，

$$\{p_k, H\}=0 \tag{2.83}$$

でなければならない．式(2.77)において $F=H$ とおけば，式(2.83)によって，

$$\frac{\partial H}{\partial q_k}=0 \tag{2.84}$$

が得られる．すなわち，p_k が保存されるための条件は H が座標変数 q_k に依存しないことである．

最後にポアッソンかっこ式の運用に慣れるため，簡単な力学系の運動方程式を式(2.68)，すなわち，式(2.69)の方式で導いてみよう．そのためにはハミルトニアンの具体形と式(2.71)および恒等式(2.70)を使う必要がある．ラグランジアンが $L=T-V$ で与えられる保存系の場合，ハミルトニアンはすでに式(2.53)で求められている．式(2.69)によれば，特定の位置座標 x_k の時間微分は $\{x_k, H\}$ であるが，V は x だけの関数だから $\{x_k, V\}=0$ となり（式(2.71)による），結局 $\{x_k, T\}=\sum_{i=1}^{n}\{x_k, p_{x_i}{}^2\}/2m_i$ だけを計算すればよい．式(2.70f)を適用すれば，

$$\{x_k, p_{x_i}{}^2\}=\{x_k, p_{x_i}\}p_{x_i}+p_{x_i}\{x_k, p_{x_i}\}=2p_{x_k}\delta_{ki}$$

となり，ただちに $\dot{x}_k=p_{x_k}/m_k$ を得る．一方，T は p だけの関数だから，p_{x_k} と T のポアッソンかっこ式はゼロとなり（式(2.71)による），時間微分は $\dot{p}_{x_k}=\{p_{x_k}, H\}=\{p_{x_k}, V\}=$

$-\partial V/\partial x_k$（式(2.77)による）．まとめれば，

$$\dot{x}_k=\frac{1}{m_k}p_{x_k}, \qquad \dot{p}_{x_k}=-\frac{\partial V}{\partial x_k} \tag{2.85}$$

であるが，これはすでによく知っている運動方程式だ．

次に，一つの質点の軌道角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ の性質をポアッソンかっこ式によって研究しよう．単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表される方向の軌道角運動量成分 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}$ と任意の力学量 $F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ のポアッソンかっこ式を定義(2.67)によって計算すれば，ただちに次式が得られる．

$$\{F,\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}\}=\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}F\ ; \tag{2.86}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{r}\times\nabla_r+\boldsymbol{p}\times\nabla_p \tag{2.87}$$

ただし，$\nabla_r=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$，$\nabla_p=(\partial/\partial p_x, \partial/\partial p_y, \partial/\partial p_z)$．この式に現れた $\hat{\boldsymbol{R}}$ は実は回転をつくる演算子である．その役割を調べるため，$\boldsymbol{n}$ を回転軸とする無限小回転 $\delta\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{n}\delta\theta$ を考えよう（$\delta\theta$ は微小量）．この回転によって，質点の位置座標は $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\delta\theta\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$，運動量は $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+\delta\theta\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}$ と変化し，力学量は $F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\to F(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')=F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+\delta\theta\{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}\cdot\nabla_r+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}\cdot\nabla_p\}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ のように変る．これを書き直せば，

$$F(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')=\{1+\delta\theta\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}\}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \tag{2.88}$$

となる（$(\delta\theta)^2$ の項を無視した）．演算子 $\hat{\boldsymbol{R}}$ はこの式に従って回転を生成して行くわけである．しかし，私たちはすでにこの役割を知っていた．すなわち，式(2.77)と式(2.78)において $p_k=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}$，$q_k$ を n のまわりの角 θ とおけば，式(2.77)は式(2.86)になり，式(2.78)は式(2.88)になるからだ．なお，簡単な計算で $\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}=\partial/\partial\theta$ であることがわかる．

いま，式(2.86)において $F=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}'$ とおき（$\boldsymbol{n}'$ は別の単位ベクトル），$\boldsymbol{L}$ に対して演算 $\hat{\boldsymbol{R}}$ を実行すれば，

$$\{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}',\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}\}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{n} \tag{2.89a}$$

または，

$$\{\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}\}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{L} \tag{2.89b}$$

という $\boldsymbol{L}$ どうしで閉じる関係式が出てくる．$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ を直角座

標系の各座標軸方向にとれば，式(2.89)は軌道角運動量の直角座標成分 $L_x=yp_z-zp_y$，$L_y=zp_x-xp_z$，$L_z=xp_y-yp_x$ に対する式，

$$\{L_x, L_y\}=L_z,\quad \{L_y, L_z\}=L_x,\quad \{L_z, L_x\}=L_y \tag{2.90}$$

を与える．さらに，$L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ に対して，

$$\{L^2, L_x\}=\{L^2, L_y\}=\{L^2, L_z\}=0 \tag{2.91}$$

が成立する．なぜならば，

$$\begin{aligned}\{L^2, L_z\}&=\{L_x^2+L_y^2, L_z\}\\&=L_x\{L_x, L_z\}+\{L_x, L_z\}L_x+L_y\{L_y, L_z\}\\&\qquad+\{L_y, L_z\}L_y\\&=-L_xL_y-L_yL_x+L_yL_x+L_xL_y=0\end{aligned}$$

となるからである．他も同様．

ポアッソンのかっこ式と量子力学　量子力学では，力学量は普通の数ではなく演算子で表される．古典的な力学量を u，v とし，それに対応する量子論的な力学量を $\hat{u}$，$\hat{v}$ としたとき，ディラックは，

$$\{u, v\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{u}, \hat{v}] \tag{2.92}$$

というおき換えによって，古典力学的な関係式や運動方程式が量子力学的な式に移行することを見つけた．$\hbar$ はプランクの定数，$[\hat{u}, \hat{v}]\equiv\hat{u}\hat{v}-\hat{v}\hat{u}$ は**交換子**とよばれる演算子である．式(2.71)と式(2.90)に「おき換え式」(2.92)を適用すれば，それぞれが量子力学における力学変数の正準交換関係と角運動量交換関係に変身する．実際，ポアッソンかっこ式と交換子の数学的構造はよく似ており，恒等式(2.70)はポアッソンかっこ式を交換子でおき換えても，そのままの形で成立する．ポアッソンのかっこ式はまさに古典力学から量子力学への掛橋なのである．

2.3　ラグランジアンの多様性

力学の正準形式では，ラグランジアンを q と $\dot{q}$ の関数 $L(q, \dot{q}, t)$ として与えることでモデルを設定し，ラグランジュの方程式またはハミルトンの正準方程式によって運動方程式を与えた．では，ラグランジアンと運動方程式の間に1対1対応があるか？　実はない！　一つの運動方程式を与えるラグランジアンは無数に多くあるのだ．この節では，まずこの種のラグランジアンの不定性について考える．次に，ラグランジアンが q と $\dot{q}$ ばかりでなくその高階時間微分 $q, \dot{q}, \cdots, q^{(\nu)} = \mathrm{d}^\nu q/\mathrm{d}t^\nu$ を含む場合の正準形式をつくろう．

2.3.1　ラグランジアンの不定性

ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ が与えられたとき，q の任意関数 $X(q, t)$ によってラグランジアンの取り替え，

$$L \longrightarrow L' = L + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \tag{2.93}$$

を実行してみよう．関数 $X(q, t)$ によるラグランジアンの変換と見なすことができる．$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ に対する偏微分公式を使えば，式(2.93)の L' は，

$$L' = L + \frac{\partial X}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{2.94}$$

と書き直せる．これが新しいラグランジアンだ．$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ を加えたことによる新しい $\dot{q}$ 依存性は右辺第3項だけである．したがって，L' による q_k に正準共役な運動量 p_k' は，

$$p_k' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = p_k + \frac{\partial X}{\partial q_k} \tag{2.95a}$$

によって与えられ（ただし，$p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ は L による正準運動量），L' によるハミルトニアンは，

$$H'(q, p', t) = \sum_{i=1}^{n} p_i' \dot{q}_i - L'$$
$$= H\left(q, p' - \frac{\partial X}{\partial q}, t\right) - \frac{\partial X}{\partial t} \qquad (2.95\text{b})$$

となる．もちろん，$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ に対して偏微分公式を使った．X によるラグランジアンの変換 $L \to L'$ は正準運動量とハミルトニアンの変換 $p_k \to p_k'$ および $H \to H'$ を誘起したわけである．

しかし，この変換は運動方程式に何の影響も与えない．その事情をまずラグランジュの方程式の場合について見るため，次の計算を行う．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}$$
$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 X}{\partial q_k \partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_i \qquad (2.96)$$

偏微分公式を使えば，右辺第2行が恒等的にゼロであることがわかる．右辺第1行が X を含まないことは明らかだから，L' と L が与える運動方程式はまったく同じになり，X の影響はいっさい現れない．

変換 $L \to L'$ に際して運動方程式が不変であることの証明はこれですんだが，念のため，今度はハミルトンの正準方程式について見てみよう．X が p をまったく含まないので，H' が与えるハミルトンの方程式は次のように変形できる．すなわち，

$$\dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial p_k'} H'\left(q, p' - \frac{\partial X}{\partial q}, t\right) = \frac{\partial}{\partial p_k} H(q, p, t)$$
$$\dot{p}_k' = -\frac{\partial}{\partial q_k'} H'\left(q, p' - \frac{\partial X}{\partial q}, t\right) \qquad (2.97\text{a})$$

から，

$$\dot{p}_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k} H(q, p, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 X}{\partial q_k \partial q_i} + \frac{\partial^2 X}{\partial q_k \partial t}$$
$$(2.97\text{b})$$

となるが，$\dot{q}_k=(\partial H/\partial p_k)$ と偏微分の公式によって X を含む項はすべて相殺してしまう．結局，式(2.97)は H による元のハミルトンの正準方程式に舞いもどるわけだ．たしかに変換(2.93)は運動方程式に影響を与えない．

この機構を見通しよく眺めるには，実は4章で導入する変分原理の方が便利だ．ここでは，初等的な微分計算をていねいに行うだけでも同じ結論に達することを示したかったのである．式(2.93)のような運動方程式に影響を与えない変換を一般に**ゲージ変換**という．後で再び議論することになろう．

さて，式(2.93)では q だけに依存する関数 X を与えたが，これが q と $\dot{q}$ の関数の場合はどうなるか？　そのとき，式(2.94)は，

$$L'=L+\frac{\partial X}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial X}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) \tag{2.98}$$

となるので，L が q と $\dot{q}$ だけの関数でも，L' は q と $\dot{q}$ ばかりでなく高階時間微分 $\ddot{q}$ を含むことになる．しかし，いままで私たちはラグランジアンが q と $\dot{q}$ の関数である場合だけを扱ってきた．力学系が高階の時間微分を含むラグランジアンによって記述されているとき，どのようにして理論体系を構築して行ったらよいかわからない．この問題を次に考えよう．

2.3.2 高階時間微分を含むラグランジアン

一度に一般的な場合を考えるよりは，まず微分階数を一つだけ上げて q，$\dot{q}$，$\ddot{q}$ の関数であるラグランジアン $L(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ によって記述される力学系の議論から始める方がよかろう．それでも，どうやって運動方程式を導いたらよいかわからない．しかし，よい方法がある．突破口は拘束条件問題の処理方法を援用することだ．すなわち，$\dot{q}_k=s_k$ とおき，

$$\dot{q}_k-s_k=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{2.99}$$

という拘束条件を設定して，q と s を独立変数として扱うのである．したがって，この拘束系のラグランジアンは，

$$L'(q, s, \dot{s}, t) = L(q, s, \dot{s}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{q}_i - s_i) \tag{2.100}$$

である．λ_i はラグランジュの未定乗数．これでラグランジアンが独立変数とその１階時間微分の関数になった．したがって，前節までの理論体系が適用できる．その方式に従えば，q_k と s_k に正準共役な運動量 p_k と π_k，およびそれぞれの一般力は次式で与えられる．

$$p_k = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_k, \qquad \pi_k = \frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \tag{2.101a}$$

$$F_{q_k} = \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \qquad F_{s_k} = \frac{\partial L'}{\partial s_k} = \frac{\partial L}{\partial s_k} - p_k \tag{2.101b}$$

ラグランジュの未定乗数 λ_k は q_k の正準共役運動量 p_k であった．ラグランジュの方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{2.102a}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} - \frac{\partial L}{\partial s_k} + p_k = 0 \tag{2.102b}$$

となるが，式(2.102b)を微分して式(2.102a)を用い，s を q にもどせば，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.103}$$

が得られる．これが運動方程式である．この問題でも実は変分原理（4章）の方が便利であり，もちろん同じ方程式を与える．

運動方程式を求めるというだけならば，これで終りだが，ハミルトニアンもつくりたい．エネルギーが何であるかを知りたいからである．式(2.48)によれば，

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{n} (p_i \dot{q}_i + \pi_i \dot{s}_i) - L' \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\pi_i \dot{s}_i + p_i s_i) - L(q, s, \dot{s}, t) \end{aligned} \tag{2.104}$$

がハミルトニアンである．ただし，$\dot{s}$ をルジャンドル変換により正準変数 q，p，s，π で書き直しておく必要がある．H はエネルギーであるが，同時にハミルトンの正準方程式をつくることによって式(2.103)と同じ運動方程式を与えるはずだ．確かめてみよう．

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}=s_k \tag{2.105a}$$

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}-\sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right)\frac{\partial \dot{s}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{2.105b}$$

$$\dot{s}_k=\frac{\partial H}{\partial \pi_k}=\dot{s}_k+\sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right)\frac{\partial \dot{s}_i}{\partial \pi_k}=\dot{s}_k \tag{2.105c}$$

$$\dot{\pi}_k=-\frac{\partial H}{\partial s_k}=\frac{\partial L}{\partial s_k}-p_k+\sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right)\frac{\partial \dot{s}_i}{\partial s_k}=\frac{\partial L}{\partial s_k}-p_k \tag{2.105d}$$

式 (2.105a) は s の定義そのものであり，式 (2.105c) は恒等式だ．式 (2.105d) に π の定義を入れ，時間微分して式(2.105a)，(2.105b)を使えば，ただちに式(2.103)が得られる．こうして，高階時間微分を含むラグランジアンが記述する力学系の正準形式ができた．これを**オストログラドスキー**(M. Ostrogradski) **の方法**という．拘束条件などがある場合への拡張も前節までの方式を援用すれば可能である．

ラグランジアンが $\dot{q}$ 以上の高階微分を含む場合の正準形式も同じようにしてつくることができる．ラグランジアンが q，$\dot{q}$，…，$q^{(\nu)}=\mathrm{d}^\nu q/\mathrm{d}t^\nu$ の関数 $L(q,\dot{q},\cdots,q^{(\nu)},t)$ であるときは，

$$s_{(1)k}=q_k,\quad s_{(2)k}=\dot{s}_{(1)k}=\dot{q}_k,\quad \cdots,\quad s_{(\nu)k}=\dot{s}_{(\nu-1)k}=q_k{}^{(\nu-1)}$$

を独立変数とし，拘束条件，

$$\dot{s}_{(\sigma)k}-s_{(\sigma+1)k}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\nu-1) \tag{2.106}$$

のもとで正準形式を構成すればよい．したがって，新しいラグランジアン，

$$L' = L(s_{(1)}, s_{(2)}, \cdots, s_{(\nu)}, \dot{s}_{(\nu)}, t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{\nu-1} \lambda_{(\sigma)k} (\dot{s}_{(\sigma)k} - s_{(\sigma+1)k}) \tag{2.107}$$

が出発点である．このラグランジアンによる正準運動量は，

$$\pi_{(\sigma)k} = \frac{\partial L'}{\partial s_{(\sigma)k}} = \delta_{\sigma\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_{(\nu)k}} + (1-\delta_{\sigma\nu})\lambda_{(\sigma)k} \tag{2.108a}$$

となるが，ここでもラグランジュの未定乗数 $\lambda_{(\sigma)k}$ は $s_{(\sigma)k}$ の正準運動量になっている（ただし，$\sigma=1, 2, \cdots, \nu-1$）．一方，一般力は，

$$F_{(\sigma)k} = \frac{\partial L'}{\partial s_{(\sigma)k}} = \frac{\partial L}{\partial s_{(\sigma)k}} - (1-\delta_{\sigma 1})\pi_{(\sigma-1)k} \tag{2.108b}$$

によって与えられる（式(2.108a)，(2.108b)では，$\sigma=1, 2, \cdots, \nu$）．こうして，ラグランジュの方程式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_{(\sigma)k} - \frac{\partial L}{\partial s_{(\sigma)k}} + (1-\delta_{\sigma 1})\pi_{(\sigma-1)k} = 0 \qquad (\sigma=1, 2, \cdots, \nu) \tag{2.109}$$

が得られる．$\sigma=\nu$ の方程式を繰り返し微分し，その都度 $\sigma<\nu$ の方程式を逐次代入して，すべての変数 s を元の q にもどせば，最終的には，

$$\sum_{\sigma=0}^{\nu} (-1)^{\sigma} \frac{\mathrm{d}^{\sigma}}{\mathrm{d}t^{\sigma}} \frac{\partial L}{\partial q_k{}^{(\sigma)}} = 0 \tag{2.110}$$

に到達する．これが求めていた運動方程式である．式(2.109)から式(2.110)までの計算は読者にまかせよう．

最後に，ハミルトニアンをつくる．公式(2.48)を忠実に適用すれば，

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{\nu} \pi_{(\sigma)i} \dot{s}_{(\sigma)i} - L'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\pi_{(\nu)i} \dot{s}_{(\nu)i} + \sum_{\sigma=1}^{\nu-1} \pi_{(\sigma)i} s_{(\sigma+1)i}\Bigr) - L \tag{2.111}$$

となる．もちろん，$\dot{s}$ は正準変数(s, π)で書き直しておかなけ

ればならない．このHによるハミルトンの正準方程式が式(2.109)または式(2.110)と同じ結果を与える．その証明も読者にまかせよう．

2.4 不連続変換と対称性

固い一般論が続いたので，息抜きに趣の違う話題を取り上げよう．保存量や保存則の存在が何かの変換に関する不変性や対称性に根ざしていることは繰り返し述べてきた．運動量保存則は平行移動不変性，角運動量保存則は回転不変性，エネルギー保存則は時間原点の移動に対する不変性を基盤としていた．しかし，これらはいずれも連続変換であった．ここでは，方向または符号の反転という種類の特殊な不連続変換の例として，鏡映・空間反転変換，時間逆転変換，荷電共役変換を考え，それについての対称性または不変性を議論する．

2.4.1 鏡映変換と空間反転変換

いま，一様な重力場が存在する地上で，右から左へ斜め上方に向かって物体を投げ上げたとすれば，物体は図2.2の実線のような放物線に沿って運動するだろう．この運動を映画に撮影し，そのフィルムを裏返しにして上映すれば，スクリーン上の運動は図2.2の破線のようになるはずだ．図のように，原点が画面中央にある直角座標系を設定すれば，破線の運動は，yz平面上に置いた平面鏡に映った物体の運動である．その意味で，破線（の図形または運動）を実線（の図形または運動）のyz平面についての**鏡映**といい，また実線から破線への変換を**鏡映変換**という．

座標原点から実線上の点に至る動径ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，破線上の点への動径ベクトルを $\boldsymbol{r}'=(x', y', z')$ とすれば，明らかに，

$$x'=-x, \quad y'=y, \quad z'=z \tag{2.112}$$

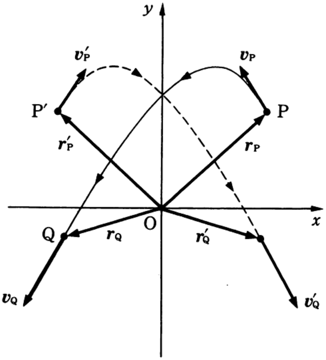


図 2.2　鏡映変換

が成り立つ．$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$ が yz 平面についての鏡映変換だ．一般に，極ベクトルに対する鏡映変換 $\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z) \to \boldsymbol{A}'=(A_x', A_y', A_z')$ は動径ベクトルと同様に，

$$A_x'=-A_x, \qquad A_y'=A_y, \qquad A_z'=A_z \tag{2.113}$$

であるが，軸ベクトルの鏡映変換 $\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z) \to \boldsymbol{B}'=(B_x', B_y', B_z')$ では，

$$B_x'=B_x, \qquad B_y'=-B_y, \qquad B_z'=-B_z \tag{2.114}$$

となることは読者諸君もご承知と思う．他の座標面についての鏡映変換を考えることもできる．速度 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ や運動量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ は極ベクトルだが，平面の断片を表すベクトルや角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は軸ベクトルである．また，電場は極ベクトルだが，磁場は軸ベクトルである．

さて，物体が初期位置 $\boldsymbol{r}_P$ を初速度 $\boldsymbol{v}_P$ で出発し，図の実線のような運動をして終速度 $\boldsymbol{v}_Q$ をもって $\boldsymbol{r}_Q$ に達したとしよう．鏡に映る運動は破線であるが，この運動が現実にも存在するとき，すなわち，物体を本当に鏡映点 $\boldsymbol{r}_P'$ に置いて鏡映速度 $\boldsymbol{v}_P'$ を初速度として与えて左から右上方に投げ上げた場合，破線上を正確にたどって鏡映速度 $\boldsymbol{v}_Q'$ をもって鏡映点 $\boldsymbol{r}_Q'$ に到達するとすれば，この運動は yz 平面の鏡映について**対称**であるという．**鏡映変換不変**であるといってもよい．現実の放物体運動は

たしかに鏡映変換不変である．いまの場合，力は $\boldsymbol{F}=(0, -mg, 0)$ であるが，これは鏡映変換不変性をもち，その結果として運動が鏡映変換不変になった．正準形式の立場でいえば，ラグランジアンまたはハミルトニアンの鏡映変換不変性がこの結果を与えたのである．zx 平面や xy 平面についての鏡映変換に対しては，この場合の力とラグランジアンまたはハミルトニアンは不変ではなく，運動の不変性は成立しない．例えば，フィルムの1コマ1コマの上下を逆転させた映像は zx 平面についての鏡映変換（$x\to x'=x, y\to y'=-y, z\to z'=z$）を与えるが，力が下を向いている限り，現実には起らない．

すべての座標面についての鏡映変換 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)\to \boldsymbol{r}'=(x', y', z')$ は，

$$x'=-x, \qquad y'=-y, \qquad z'=-z \tag{2.115}$$

すなわち，$\boldsymbol{r}\to -\boldsymbol{r}'$ によって与えられるが，これを**空間反転変換**という．略してＰ**変換**ということもある．この変換に際して，すべての極ベクトルは方向を反転するが，軸ベクトルは元のままである．例えば，$\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{L}$．また，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ に対しては，$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'=-\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}$．図2.2の運動は明らかに空間反転について対称ではない．力 $\boldsymbol{F}$ が空間反転不変ではなかったためである．しかし，地球が完全な球体であり，しかも物質分布が一様である理想的な場合を想定し，座標原点を地球の中心に置けば，放物体運動の空間反転対称性は回復する．すなわち，日本のどこかで図2.2のような運動が起ったとき，その運動の空間反転は南アメリカのどこかの運動に変換されるが，それは現実に起りうるものだからだ．この例は中心力場の運動であり，中心力ポテンシャルは空間反転不変である．一般に，空間反転変換（2.115）に対して不変なラグランジアンまたはハミルトニアンをもつ力学系の運動は空間反転について対称となる．

放物体の運動を離れて，図2.3のような点Oを中心とする

円周上の回転運動を考えよう．速度の大きさは一定であるとする．この回転運動は中心についての空間反転変換に対して不変である．なぜならば，点P，Q，R，Sの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ とそこでの運動量ベクトル $\boldsymbol{p}_{\mathrm{P}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{Q}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{S}}$ は空間反転によって，それぞれ，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}\to\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}'=\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}\to\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}'=\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}\to\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}'=\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}\to\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}'=\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{P}}\to\boldsymbol{p}_{\mathrm{P}}'=\boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{Q}}\to\boldsymbol{p}_{\mathrm{Q}}'=\boldsymbol{p}_{\mathrm{S}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}\to\boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}'=\boldsymbol{p}_{\mathrm{P}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{S}}\to\boldsymbol{p}_{\mathrm{S}}'=\boldsymbol{p}_{\mathrm{Q}}$ に変換され，回転運動全体としてはまったく変らないからだ．これは角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ の空間反転不変性の視覚化と考えてもよい．

式(1.58)の変換係数で書けば，鏡映変換(2.112)の場合は $A_{11}=-1$，$A_{22}=A_{33}=1$，他は 0，空間反転変換の場合は $A_{ij}=-\delta_{ij}$ であり，いずれも $\det(\mathrm{A}_{ij})=-1$ を与える．回転変換と鏡映または空間反転変換の組合せに対しても $\det(\mathrm{A}_{ij})=-1$ となることは明らかだろう．

物質の構成要素である原子，またその構成要素である素粒子を支配する基本的な力学法則は空間反転対称性をもっているだろうか？　基本原理としては当然対称性をもつと思うだろう．素粒子どうしは電磁相互作用と強い相互作用および弱い相互作用を行うが，物質構造を直接担う前二者はたしかに空間反転に

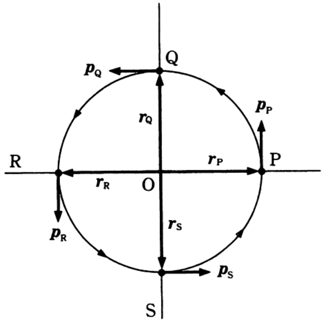


図 2.3　回転運動

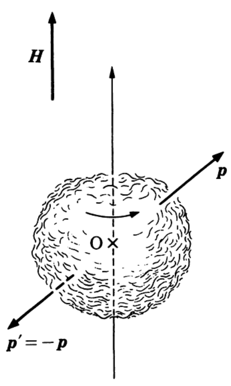


図 2.4　ベータ崩壊の空間反転

際して不変である．しかし，弱い相互作用は必ずしも空間反転不変性をもたないことが李と楊によって明らかにされた（1957年度ノーベル賞）．

例えば，中性子はベータ崩壊して陽子，電子，ニュートリノに壊れるが，この現象は空間反転不変ではない．この事実は中性子を多数含んでいる原子核（コバルト60の原子核）のベータ崩壊についての次のような実験によって確認された．スピンをもつ原子核は自転していると考えてよいが，その回転方向に磁気能率をもつので，一定の磁場 $\boldsymbol{H}$ をかけると回転軸は磁場の方向を向く（図2.4を見よ）．この原子核内の中性子がベータ崩壊すれば電子が放出され，私たちはそれを観測することができる．その電子の運動量を $\boldsymbol{p}$ としよう．この現象を空間反転させれば，磁場と回転運動は変らないが，電子の運動量は $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}$ のように変換される．したがって，もしもベータ崩壊の相互作用が空間反転不変であれば，放出される電子の数や分布は磁場の方向と反対方向に関してまったく対称的になっているはずだ．しかし，実験結果はこの予想を裏切り，反対方向に放出される電子の数の方が圧倒的に多かったのである．

鏡映または空間反転変換対称性が成り立つ場合，それに付随する保存量は＋，－という2個の値しかとらない**パリティ**（**偶奇性**）である．ていねいに，空間反転パリティまたは**Pパリティ**とよぶこともある．上記のベータ崩壊実験はパリティ非保存を示すものであった．パリティは古典力学ではなじみにくいものだが，量子力学の領域では重要な量子数になる．ここではこれ以上深入りしない．

ところで，鏡映変換不変または空間反転不変な運動を使って他人に左右を教えることはできない．例えば，図2.2の運動の映画を異星人に送り，運動の起点を右，終点を左だと教えようとしても，彼らはフィルムを裏返しにして上映するかもしれないのだ．これでは左右が逆になる．読者は子供の頃どのようにして右と左を覚えたか？　思い出してみるのも一興だろう．

2.4.2　時間逆転変換

もう一度図2.2の放物体運動にもどる．この運動の映画フィルムを逆転上映すると，元の運動の軌跡を逆行する図2.5のような運動が見られる．すなわち，はじめ点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ にあった物体が初速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}'=-\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}$ をもって運動を開始し，元の運動の経路を正確に逆にたどって，終速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}'=-\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}$ をもって点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ に到達するわけだ．図2.5の運動を元の運動の時間逆転運動とよぶ．これはスクリーン上の運動であるが，現実の運動としても存在するならば，この力学系は時間逆転変換に際して対称または不変であるという．放物体の運動はまさに時間逆転対称性をもっている．映画で忍者が高い塀の上に飛び上がるシーンがあるが，それは多くの場合飛び降りた運動のフィルムの逆転組み込みだろう．時間逆転対称性の利用だ．

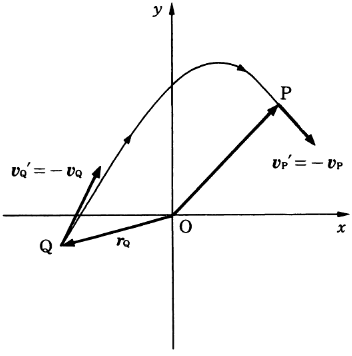


図2.5　時間逆転変換

時間逆転運動における位置座標 $\boldsymbol{r}'=(x', y', z')$ と速度 $\boldsymbol{v}'=(v_x', v_y', v_z')$ は，

$$x'=x, \quad y'=y, \quad z'=z \tag{2.116a}$$

$$v_x'=-v_x, \quad v_y'=-v_y, \quad v_z'=-v_z \tag{2.116b}$$

によって与えられる．この変換，すなわち，$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ を時間逆転変換という．これは形式的には，

$$x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to -t \tag{2.117}$$

という変換と同等である．この**時間逆転変換**を略して T **変換**ともいう．ラグランジアンまたはハミルトニアンがこの変換に対して不変ならば，その力学系は時間逆転対称性をもつ．この場合の保存量は T **パリティ**であるが，これも古典力学ではあまり用がない．

時間逆転変換(2.117)に対して，$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' = -\boldsymbol{H}$ となる．角運動量の符号が反転するが，それは図 2.3 の時間逆転運動が逆まわりであることからも明らかだろう．

一般に，ある現象を撮影した映画フィルムを逆転上映したとき，スクリーン上の映像が現実にも存在するとき，その現象を**可逆過程**といい，存在しないとき**不可逆過程**（または**非可逆過程**）という．図 2.5 の運動は可逆過程の一例であった．一方，水の中に落とした赤インクの拡散，マッチが燃えて灰になる化学反応，生物の成長や死などは不可逆変化である．しかし，マッチや生物も構成要素に分解すれば，原子の集合になってしまう．原子自身は時間逆転不変な力学法則に従っているのに，時間逆転不変でない不可逆過程が現れるのは何とも不思議である．これは現代物理学の長年にわたる興味深い課題であるが，この本の性質上，残念ながら詳しく議論している余裕はない．

可逆な現象を使って，時間進行の方向，すなわち，過去と未来を教えることはできない．例えば，異星人は図 2.2 の映画フィルムを逆転上映するかも知れないからである．それでは運動の過去と未来を逆にして覚えてしまう．

2.4.3 荷電共役変換

最後に，電磁場中の荷電粒子の運動に関する荷電共役変換とその対称性について説明しておきたい．図 2.6(a)のように正負に帯電した平行極板内の空間における正電荷粒子の運動を考え

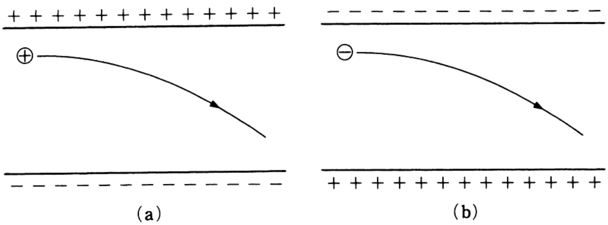


図 2.6　荷電共役変換

よう．電場は上から下に向かうので，この粒子は負の極板に引き付けられるように運動するだろう．この場合，すべての電荷の符号を反転したとすれば，同じ初期条件に対してまったく同じ運動が起るか？　もしも現実に同じ運動が起れば，この力学系は荷電共役変換に対して不変であるという．**荷電共役変換**はすべての電荷の符号を反転させる変換である．C **変換**ともいう．いまの場合，電荷の符号を反転させれば，図 2.6(b)の場合に移行するので，運動は図 2.6(a)とまったく同じになり，荷電共役対称性が成り立つ．一般に，荷電共役変換は電荷密度 ρ および電流密度 $\boldsymbol{J}$ に対する変換，

$$\rho \to -\rho, \quad \boldsymbol{J} \to -\boldsymbol{J} \tag{2.118}$$

によって与えられる．電場と磁場に対しては，$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' = -\boldsymbol{H}$．ラグランジアンまたはハミルトニアンがこの変換に対して不変であれば，その力学系は荷電共役対称性をもつ．その場合の保存量はC **パリティ**であるが，これも古典力学ではなじみが薄い．

素粒子の場合　相互作用が局所的かつローレンツ不変であるなどの条件のもとでは，理論体系は（P，T，C 個々の変換について不変でなくても）PTC の同時変換に対して不変であることが証明されている．上記のように，弱い相互作用は P 変換に際して必ずしも不変ではなかったが，PC 変換については不変であるという可能性がある．また，PC 不変でなくても，T 不変性が壊れて

いて，全体としてPTC不変が保たれるという場合がありうる．PC不変とT不変の両方が破れている可能性が研究されているが，その程度はP不変性の破れに比べてはるかに小さいらしい．いずれにしても，不変性の破れは各素粒子の具体的性質に反映するので重要である．

問　題

2.1 ポテンシャル $V(r)$ をもつ中心力場内の質量 μ の質点のラグランジアンは $L=(\mu/2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(r)$ である（ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）．$x=r\sin\theta\cos\phi$，$y=r\sin\theta\sin\phi$，$z=r\cos\theta$ で与えられる球座標変数 r，θ，ϕ を導入して，このラグランジアンを書き直し，(a) 各変数の正準共役運動量，(b) ラグランジュの方程式，(c) ハミルトニアン，(d) ハミルトンの正準方程式を求めよ．さらに，本文中の式(2.23)および式(2.54)で扱った運動平面上の表現との関係を議論せよ．

2.2 q_k が循環座標である場合，それに正準共役な運動量 p_k は保存され一定値 α_k をとる．定義式 $p_k=\partial L/\partial\dot{q}_k$ を $\dot{q}_k$ について解いた解 $\dot{q}_k(\alpha_k, q_j, \dot{q}_j)$（ただし $j\neq k$）をラグランジアンに入れて，それを L_α と書く．このとき，$\tilde{L}(\alpha_k, q_j, \dot{q}_j)\equiv L_\alpha-\alpha_k\dot{q}_k(\alpha_k, q_j, \dot{q}_j)$ が変数 $q_j\,(j\neq k)$ に対する正しい運動方程式を与える有効ラグランジアンであることを証明せよ．循環座標関係の変数を定数 α_k によって消去したわけだ．$(\partial L/\partial\dot{q}_j)_{p_k=\alpha_k}=(\partial/\partial\dot{q}_j)[L_\alpha-\alpha_k\dot{q}_k(\alpha_k, q_j, \dot{q}_j)]$，$(\partial L/\partial q_j)_{p_k=\alpha_k}=(\partial/\partial q_j)[L_\alpha-\alpha_k\dot{q}_k(\alpha_k, q_j, \dot{q}_j)]$ を証明すればよい．

2.3 前問の方式を式(2.23)の例題に適用して，r と $\dot{r}$ だけのラグランジアン $\tilde{L}$ を求め，それによって運動方程式を導け．また，問題2.1に適用してみよ．

2.4 問題2.2の方式をハミルトンの立場に移行させ，$\tilde{L}$ に対応する有効ハミルトニアン $\tilde{H}$ を求めよ．また，それを式(2.23)の

問題に適用し式(2.54)と比較せよ．

2.5　ラグランジアン $L=-mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}^2/c^2}-V(\boldsymbol{r})$ によって記述される力学系に対して(c は光速度)，(a) x，y，z の正準共役運動量，(b) ラグランジュの方程式，(c) ハミルトニアン，(d) ハミルトンの正準方程式を求めよ．この場合，運動方程式は式(1.68) となる（ただし，$\boldsymbol{f}=\nabla V$)．すなわち，この L が相対論的な力学系を記述するラグランジアンだったのである．さらに，(e) 運動量の大きさ p が mc に比べて十分小さいとき，ハミルトニアンが近似的に $mc^2+(1/2m)p^2+V$ に等しくなることを確認せよ．$\boldsymbol{p}$ は正準運動量である．

2.6　1章の問題1.15の拘束条件を式(2.33)によってラグランジアンに取り込み，ラグランジュ・ハミルトンの立場で議論せよ．

2.7　ポアッソンかっこ式が満足する恒等式(2.70)を証明せよ．

2.8　2個の力学量 f，g が保存量のとき，$\{f, g\}$ もまた保存量になることを証明せよ．

2.9　中心力場のハミルトニアンは式(2.54)であった（ただし，l は p_θ にもどしておく)．式(2.69)により，ポアッソンかっこ式を用いて，正準変数 r，p_r，θ，p_θ に対する運動方程式を求めよ．ただし，恒等式 (2.70)，(2.71) ($\{r, p_r\}=\{\theta, p_\theta\}=1$ など)を利用せよ．

2.10　力が作用していない自由質点に対しては，式(2.74)の演算子は $\hat{L}=(\boldsymbol{p}/m)\cdot\nabla$ となり，式(2.76)の演算子 $\exp[(t-t_0)\hat{L}]$ がたしかに時間発展を与えること，すなわち，次のようになることを証明せよ．

$$\exp[(t-t_0)\hat{L}]\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{p}}{m}(t-t_0),\qquad \exp[(t-t_0)\hat{L}]\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$$

2.11　1次元調和振動子に対して，変数 $a=\sqrt{(m\omega/2\hbar)}\{x+i(p/m\omega)\}$ とその複素共役 $a^*=\sqrt{m\omega/2\hbar}\,\{x-i(p/m\omega)\}$ を導入すれば，(a) ポアッソンかっこ式に対して $\{a, a^*\}=(1/i\hbar)$ が成立すること，(b) ハミルトニアンが $H=(1/2m)p^2+(m\omega^2/2)x^2=\hbar\omega a^*a$ と表せることを示せ．ただし，m は質量，ω は振動数．$\hbar$ は

ここでは作用の次元をもつただの任意定数だが，おき換え(2.92)によって量子力学に移行するときはプランクの定数でなければならない．

2.12 3章で求める予定であるが，ポテンシャル V をもつ力の場に置かれた質量 m，電荷 e の質点に十分弱い一様な静磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけた場合，ハミルトニアンは近似的に $H=(1/2m)\boldsymbol{p}^2+V-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ となる．ただし，$\boldsymbol{\mu}=(e/2mc)\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$．$V$ は $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数の中心力であるとしよう．$\boldsymbol{B}=$一定として，次の問に答えよ．

(a) $\{\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{L}\}=0$，$\{V, \boldsymbol{L}\}=0$ を証明せよ．

(b) $\boldsymbol{L}$ の運動方程式が，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\{\boldsymbol{L}, H\}=-\frac{\mathrm{e}}{2mc}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{L}$$

となることを示し，これを初期条件 $\boldsymbol{L}(t=0)=\boldsymbol{L}_0$ に対して解け．

2.13 ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ に q と $\dot{q}$ の関数 $X(q, \dot{q}, t)$ の全時間微分 $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ を加えて新しいラグランジアン $L'=L+\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ をつくれば，それは式(2.98)のように高階微分 $\ddot{q}$ を含む．この場合も，運動方程式は変換 $L\to L'$ によって何の変更も受けないことを証明せよ．

2.14 単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を法線方向とする平面についての鏡映変換を極ベクトル $\boldsymbol{A}$ と軸ベクトル $\boldsymbol{B}$ の場合に対して具体的に書け．

2.15 単位ベクトル $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$ を法線方向とする二つの平面がある．各々の平面についての鏡映変換を続けて実施した場合の結果は一つの回転変換に同等であることを証明し，その回転変換を求めよ．

2.16 力学変数 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ の任意関数 $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ に対する演算 $\hat{P}F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})=F(-\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{p})$ によってP変換演算子 $\hat{P}$ を定義すれば，明らかに $\hat{P}^2=1$ である．したがって，固有値は ±1 であり，対称または反対称関数 $F_\pm(-\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{p})=\pm F_\pm(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ がそれぞれ ±1 に属する固有関数となる．このとき $F_\pm$ は**パリティ** $\pm$ をもつと

いう．関数 $F_{\pm}$ のパリティは，ハミルトニアン H（したがって，式(2.74)の L）が空間反転不変であれば，保存量となることを証明せよ．なお，T 変換，C 変換についても同様の性質がある．

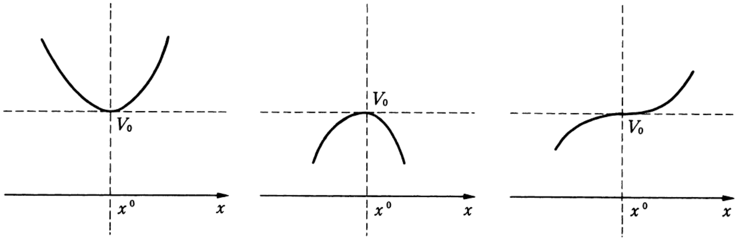
2.17 読者が現在もっている電磁気学の知識で，P 変換，T 変換，C 変換に対する電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ の変換性を説明せよ．

3　力学系いろいろ

3.1　基準座標と基準振動

安定平衡点付近の微小振動の概略を見るため，まず簡単な1次元問題を取り上げよう．すでに1.3.3項では，エネルギー保存則(1.39)を基礎にして，質量 m の質点がポテンシャル $V(x)$ 内で行う1次元運動を議論した．平衡点 x^0 では力がゼロになり $[\mathrm{d}V/\mathrm{d}x]_0=0$（添字0は x^0 での値を表す）が成立するが，そのまわりのポテンシャルの変化は大別して図3.1(a)，(b)，(c)のようになる．(a)は極小点（$K\equiv[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2]_0>0$）で安定平衡点，(b)は極大点（$K<0$）で不安定平衡点を与える．(c)は反曲点（$K=0$）だが，これも不安定平衡点だ．ポテンシャルを x^0 のまわりでテイラー展開すれば $V(x)=V_0+[\mathrm{d}V/\mathrm{d}x]_0(x-x^0)+(1/2)K(x-x^0)^2+\cdots\cdot$ であるが，便宜上エネルギーと x 座標の原点を $V_0=0$，$x^0=0$ と選べば，(a)の場合（$K>0$）に限っては（微小振動という理由で）x^3 以上の項を無視することができて，結局 $V(x)=(1/2)Kx^2$ となる．これは調和振動子のポテンシャルだ．したがって，運動方程式は $\ddot{x}+\omega^2x=0$ となり($\omega^2=K/m$)，ただちに解(1.44)が得られる．これが安定平衡点付近の微小振動である．一般の質点系でも以下に見るように大体の筋道は変らない．ただし，$K=0$ の

場合は注意を要する．$K=[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2]_0=0$ でも，さらに $[\mathrm{d}^3V/\mathrm{d}x^3]_0=0$ で $[\mathrm{d}^4V/\mathrm{d}x^4]_0$ がゼロでない正値をとる場合があるからである．このときは x^4 型ポテンシャルによる非調和振動が起る．非線形振動の一例であり興味深いが，非線形問題の詳細に立ち入っている余裕は，残念ながらこの本にはない．



(a)　安定平衡点(極小)　(b)　不安定平衡点(極大)　(c)　不安定平衡点(反曲)

図 3.1　平衡点付近のポテンシャル

さて，N 個の質点をもつ質点系がラグランジアン，

$$L=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k-V(q) \tag{3.1}$$

によって記述される場合を考えよう．位置変数 $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_{(1)}, \boldsymbol{r}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{r}_{(N)})$ を一般座標 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ で表してあるが，拘束条件がなければ $n=3N$，K 個の拘束条件があれば，適当な座標変数を選んで $n=3N-K$ とおくことができる．拘束条件問題はすでに詳しく議論したので繰り返さない．また，運動座標系への変換は考えていないので，質量行列 (M_{jk}) とポテンシャル V は一般座標 q だけに依存して時間を陽に含まないとしよう．ここでは，ポテンシャル V が安定平衡点をもつ場合を想定し（1.5.1 項参照），その一つの安定平衡点 $q^0=(q_1{}^0, q_2{}^0, \cdots, q_n{}^0)$ のまわりの小振動を取り扱う．平衡点の条件は，

$$\left[\frac{\partial V}{\partial q_j}\right]_{q=q^0}=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{3.2}$$

であり，その平衡点が安定であるためには，

$$V_{jk}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right]_{q=q^0} \qquad (j, k=1, 2, \cdots\cdot, n) \tag{3.3}$$

のつくる対称行列 $V=(V_{jk})$ が正値でなければならない．対称性 $V_{jk}=V_{kj}$（または $V^T=V$; T は転置行列を表す）は明らかだろう．正値という意味は，V_{ij} を係数とする任意の n 次元実数ベクトル $(X_1, X_2, \cdots\cdot, X_n)$ の 2 次形式が正となることである．式で書けば，$X_1, X_2, \cdots\cdot, X_n$ を成分とする N 行 1 列の列ベクトルを X とし，その転置ベクトルを X^T と書いたとき，すなわち，

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad X^T=(X_1, X_2, \cdots\cdot, X_n) \tag{3.4}$$

と書いたとき，ゼロベクトルでない X がどのような値をとろうと常に，

$$(X, VX) \equiv X^T VX=\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X_j V_{jk} X_k > 0 \tag{3.5}$$

が成立することだ．一方，質量行列 $M=(M_{jk})$ は明らかに対称な正値行列であり，逆行列 M^{-1} をもつ（式(2.13)付近の議論を参照せよ）．

$$(X, MX)=X^T MX=\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X_j M_{jk} X_k > 0, \qquad \det(M_{ij}) \neq 0 \tag{3.6}$$

便宜上エネルギーの原点を $V(q^0)=0$ であるように選ぼう．ポテンシャル V を平衡点 q^0 のまわりでテイラー展開し，微小振動ということで $(q-q^0)$ の 3 次以上の高次項を無視すれば，

$$V(q_1, q_2, \cdots\cdot, q_n)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n V_{jk}(q_j-q_j^0)(q_k-q_k^0) \tag{3.7}$$

と近似することができる．一方，質量行列 M も微小振動の場

合には平衡点の値で近似してよい．簡単のため，その値を同じ記号 M で書こう．こうして，変数，

$$Q_j=q_j-q_j^0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{3.8}$$

を使えば，ラグランジアン(3.1)は近似的に，

$$L=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(M_{jk}\dot{Q}_j\dot{Q}_k-V_{jk}Q_jQ_k)=\frac{1}{2}\{(\dot{Q}, M\dot{Q})-(Q, VQ)\} \tag{3.9}$$

と書くことができる．ただし，Q は $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ を成分とする式(3.4)と同様な列ベクトルである．これからはこの記法を随時使う．式(3.9)が平衡点付近の小振動の議論の出発点となるラグランジアンだ．

Q_j に正準共役な運動量 P_j と一般力 F_j は，

$$P_j=\sum_{k=1}^{n}M_{jk}\dot{Q}_k=(M\dot{Q})_j, \qquad F_j=-\sum_{K=1}^{n}V_{jk}Q_k=-(VQ)_j \tag{3.10}$$

だから，ラグランジュの方程式は，

$$\sum_{k=1}^{n}(M_{jk}\ddot{Q}_k+V_{jk}Q_k)=0 \tag{3.11a}$$

となり，行列表現で書けば，

$$M\ddot{Q}+VQ=0 \tag{3.11b}$$

である．行列 M が逆をもつので，ルジャンドル変換 $\dot{Q}=M^{-1}P$ が可能であり，ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\{P_j(M^{-1})_{jk}P_k+Q_jV_{jk}Q_k\} \\ &=\frac{1}{2}\{(P, M^{-1}P)+(Q, VQ)\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる．式(3.12)からハミルトンの正準方程式をつくれば，再び式(3.11)が得られることはいうまでもない．式(3.11)は n 個の未知数 $Q=(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$ に対する n 個の方程式であり，質量行列 M が逆をもつので解くことができる．行列 M

と V が正値のため振動型の解をもつが，一般には，各変数が結合した連成振動である．この方程式を初期条件，

$$Q_j(t=0)=A_j, \qquad \dot{Q}_j(t=0)=B_j \tag{3.13}$$

のもとで解こうというのである．

まず，式(3.11b)を書き換えて，

$$\ddot{Q}+\Lambda Q=0 ; \quad \Lambda\equiv M^{-1}V \tag{3.14}$$

とし，行列 Λ の固有値問題，

$$\Lambda X^k=\lambda_k X^k \tag{3.15a}$$

を解きたい．λ_k は Λ の k 番目固有値 $(k=1,2,\cdots\cdot,n)$，X^k はそれに属する固有ベクトルだ（成分記号の添字との混同を避けるため，番号を上に付けた）．これを解くことは，

$$\lambda_k MX^k-VX^k=0 \tag{3.15b}$$

を解くことと同等である．式(3.15b)は n 個の未知数 $X^k{}_1$, $X^k{}_2, \cdots\cdot, X^k{}_n$ に対する n 元線形同次方程式だから，解が存在するためには，係数のつくる行列式がゼロでなければならない．

$$\det(\lambda M_{jk}-V_{jk})=\begin{vmatrix} \lambda M_{11}-V_{11} & \lambda M_{12}-V_{12} & \cdots\cdot & \lambda M_{1n}-V_{1n} \\ \lambda M_{21}-V_{21} & \lambda M_{22}-V_{22} & \cdots\cdot & \lambda M_{2n}-V_{2n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \lambda M_{n1}-V_{n1} & \lambda M_{n2}-V_{n2} & \cdots\cdot & \lambda M_{nn}-V_{nn} \end{vmatrix}=0 \tag{3.16}$$

λ_k の番号 k はわざと省いた．式(3.16)は固有値 λ を決める n 次代数方程式である．したがって，一般に n 個の根 λ_1，λ_2，$\cdots\cdot$，λ_n をもつ．式(3.15)の k はこの番号を表すものであった．

根 $\lambda_k\,(k=1,2,\cdots\cdot,n)$ が正の実数であることは，式(3.15b)に左から $X^{k\mathrm{T}}$ を行列的に掛ければ，ただちにわかる．すなわち，

$$\lambda_k=\frac{(X^k,\ VX^k)}{(X^k,\ MX^k)}>0 \tag{3.17}$$

となる．行列 M と V が正値であることの結果だ．そこで，

これからは,

$$\lambda_k = \omega_k{}^2 \tag{3.18}$$

とおくことにしよう．ω_k は実数である．

また，相異なる固有値 λ_k, λ_j に属する固有ベクトル X^k, X^j の組は,

$$(X^j, MX^k) = 0 \tag{3.19}$$

の意味で直交する．証明は次の通りである．X^k の固有値方程式(3.15b)に左から $X^{j\mathrm{T}}$ を掛け，X^j の固有値方程式 $\lambda_j MX^j - VX^j = 0$ の転置式に右から X^k を掛けて辺々引算すれば，M と V が対称行列であるため,

$$(\lambda_k - \lambda_j)(X^j, MX^k) = 0 \tag{3.20}$$

が得られる．これが $\lambda_k \neq \lambda_j$ の場合に式(3.19)を与えるというわけだ．$\lambda_k = \lambda_j$ の場合 (X^k, MX^k) は正値をとりゼロにはならない．方程式(3.15)は線形同次方程式だから，X^k が解であれば，任意定数を掛けた $C_k X^k$ も解となる．したがって，この不定性を利用し,

$$(X^k, MX^k) = 1 \tag{3.21}$$

が成り立つように，任意定数 C_k を決めることが常に可能である．これを固有ベクトルの**規格化**という．今後，固有ベクトルは式(3.21)の意味で規格化されているものとする．

式(3.16)の根の分布としては，いろいろな場合がありうるが，はじめに $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdot, \lambda_n$ が互いに相異なる場合を想定しよう．このとき，固有値 λ_k をもつ線形同次方程式(3.15b)は，ベクトル X^k の1個の成分を不定のまま残し，それに対する他の $n-1$ 個の成分の比をすべて決める．その不定成分は規格化条件(3.21)によって与えることができる．こうして，すべての固有ベクトル $X^k (k=1, 2, \cdots\cdot, n)$ が定まり，直交規格化条件,

$$(X^j,\ MX^k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \cdots\cdot, n) \tag{3.22}$$

に従うことになった．他方，n 個の根の中に重根がある場合，例えば，$m\,(m<n)$ 個が相等しく他の根が違っている場合，そ

の m 個の固有値に属する固有ベクトルは不定になり，式(3.15b)によって決めることができない．しかし，適当な数の組合せをつくって，式(3.22)が成り立つようにすることは可能である．いずれも，初等線形代数学の教えるところだ．

さて，ベクトル X^1，X^2，$\cdots\cdot$，X^n を列ベクトルとしてもつ行列 U を定義しよう．

$$U \equiv (X^1, X^2, \cdots\cdot, X^n) = \begin{pmatrix} X^1{}_1 & X^2{}_1 & \cdots\cdot & X^n{}_1 \\ X^1{}_2 & X^2{}_2 & \cdots\cdot & X^n{}_2 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ X^1{}_n & X^2{}_n & \cdots\cdot & X^n{}_n \end{pmatrix} \tag{3.23a}$$

または，

$$U_{jk} \equiv X^k{}_j \tag{3.23b}$$

したがって，転置行列 U^{T} は $X^{1\mathrm{T}}$，$X^{2\mathrm{T}}$，$\cdots\cdot$，$X^{n\mathrm{T}}$ を行ベクトルとしてもつ行列になって，次の成分をもつ．

$$(U^{\mathrm{T}})_{jk} = X^j{}_k \tag{3.24}$$

この行列 U と U^{T} を利用すれば，直交規格化条件 (3.22) は，

$$(U^{\mathrm{T}}MU)_{jk} = X^{j\mathrm{T}}MX^k = \delta_{jk} \qquad \text{すなわち} \qquad U^{\mathrm{T}}MU = 1 \tag{3.25}$$

となる．1は単位行列である．さらに，式 (3.15b) を使えば，重要な関係式，

$$(U^{\mathrm{T}}VU)_{jk} = \omega_k{}^2 (U^{\mathrm{T}}MU)_{jk} = \omega_k{}^2 \delta_{jk} \qquad \text{すなわち} \quad U^{\mathrm{T}}VU = \Omega^2 \tag{3.26}$$

が得られる．ただし，Ω^2 は $\lambda_k = \omega_k{}^2$ (式(3.18)を見よ)を成分とする対角行列，

$$\Omega^2 \equiv \begin{pmatrix} \omega_1{}^2 & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & \omega_2{}^2 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & 0 & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & \omega_n{}^2 \end{pmatrix}, \qquad (\Omega^2)_{jk} \equiv \omega_k{}^2 \delta_{jk} \tag{3.27}$$

である．証明はいずれも簡単だ．

これだけの用意があれば，運動方程式(3.14)または式(3.11)は扱いやすい．いま，

$$Q=U\xi \qquad \text{すなわち} \qquad Q_j=\sum_{k=1}^{n} X^k{}_j \xi_k \tag{3.28}$$

とおいて（ξ は $\xi_1, \cdots\cdot, \xi_n$ を成分とする列ベクトル），変数変換 $Q \to \xi$ を実行すれば，式 (3.25) と式 (3.26) のおかげで，ξ に対する方程式，

$$\ddot{\xi}+\Omega^2\xi=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \ddot{\xi}_k+\omega_k{}^2\xi_k=0 \tag{3.29}$$

が得られる．式(3.11)では Q_j の成分が結合していたが，ξ_k の方程式では各成分が完全に分離されている．$\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdot, \xi_n)$ を**基準座標**，その各成分が表す運動を**基準振動**または**規準モードの振動**という．k は基準モードの番号を表すものだ．式(3.29)はただちに解けて，

$$\xi_k(t)=\alpha_k \cos\omega_k t+\frac{\beta_k}{\omega_k}\sin\omega_k t \tag{3.30}$$

を与える．ここで，$\xi_k(0)=\alpha_k$，$\dot{\xi}_k(0)=\beta_k$ が基準座標の初期値である．ゆえに，元の座標 Q の運動は，

$$Q_j(t)=\sum_{k=1}^{n} X^k{}_j\left(\alpha_k \cos\omega_k t+\frac{\beta_k}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \tag{3.31}$$

によって与えられる．式(3.28)を ξ について解けば，

$$\xi=U^{\mathrm{T}}MQ \qquad \text{または} \qquad \xi_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X^k{}_i M_{ij} Q_j \tag{3.32}$$

であるから，Q の初期値(3.13)を指定すれば，ξ の初期値は，

$$\alpha_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X^k{}_i M_{ij} A_j, \qquad \beta_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X^k{}_i M_{ij} B_j \tag{3.33}$$

によって決めておかなければならない．

基準座標 ξ を使って表せば，ラグランジアンとハミルトニアンは，

$$L=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\dot{\xi}_k{}^2-\omega_k{}^2\xi_k{}^2)=\frac{1}{2}(\dot{\xi}^{\mathrm{T}}\dot{\xi}-\xi^{\mathrm{T}}\Omega^2\xi) \tag{3.34}$$

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(p_{\xi k}{}^2+\omega_k{}^2\xi_k{}^2)=\frac{1}{2}(p_\xi{}^{\mathrm{T}}p_\xi+\xi^{\mathrm{T}}\Omega^2\xi) \tag{3.35}$$

となる．$p_{\xi k}=\partial L/\partial\dot{\xi}_k=\dot{\xi}_k$ は ξ_k に正準共役な運動量である．基準座標で書けば，ラグランジアンもハミルトニアンもきわめて簡単な形をとるわけだ．基準座標が理想的な標準形として重要視されるゆえんである．なお，元のラグランジアン(3.1)に強制外力項，

$$V^{(E)}=-\sum_{j=1}^{n}F^{(E)}{}_jQ_j \tag{3.36}$$

が付加されている場合，基準振動の方程式は，

$$\ddot{\xi}+\Omega^2\xi=\phi;\qquad \phi=U^{\mathrm{T}}MF^{(E)} \tag{3.37}$$

となる．$F^{(E)}$ は $F^{(E)}{}_j\,(j=1, 2, \cdots, n)$ を成分とする列ベクトルである．このときラグランジアンには $-V^{(E)}$，ハミルトニアンには $+V^{(E)}$ が付加されるわけだ．

最後に，外力がまったく存在せず，V が質点間力だけのポテンシャルである場合についての注意を与えておこう．このとき，重心は自由質点のように行動するので，式(3.5)がゼロになることもある．この場合を含めれば，一般に，$(X, VX)\geqq 0$ であり，固有値 $\lambda_k=\omega_k{}^2$ の一つはゼロとなる（章末問題を見よ）．

3.2 連続体の振動と波動

図3.2のように多数の質点とばねを鎖状に連結し，直線上に拘束した力学系を考えよう．多数のビーズ玉に細い滑らかな直線状の針金を通し，ばねでつないだ状況を想像すればよい．ある時刻に，一つの質点の位置の近くに周囲の質点を引き寄せて放せば，直線に沿う方向の振動が起り左右に広がって行くだろう．このような装置はしばしば**縦波**のモデルとして利用される．また，直線上に拘束することをやめ（すなわち，針金を通

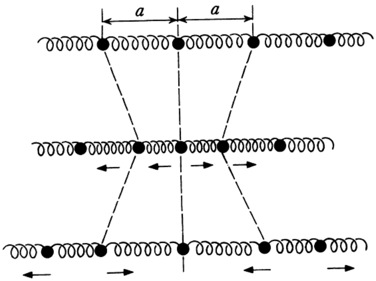


図 3.2　鎖モデル（縦波）

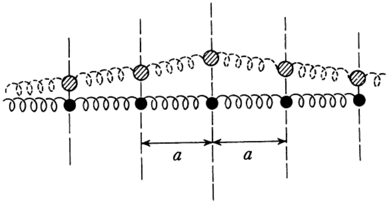


図 3.3　鎖モデル（横波）

すことをやめ）直線状にピンと張ったうえで，図 3.3 のように一部をつまんでもち上げれば，上下方向の振動が起って，これも左右に伝搬するだろう．**横波**のモデルである．この場合，厳密にいえば，直線方向の振動（縦波の成分）も混在するだろう．各質点は質量をもっているので，運動を維持し続けようとする慣性をもっているし，ばねによって元の位置にもどろうとする復原力と，隣の質点を押しやったり引っ張ったりする結合力が与えられている．したがって，各質点は隣から隣へ運動量とエネルギーを移動させて行くことができる．これが波動現象の原型だ．見掛けは波のように見えても，運動量とエネルギーを輸送できないものは波動ではない！　波動現象を引き起す機構は，波動の媒質となる物質の各部分が慣性力と復原力と結合力をもつところにある．

3.2.1　鎖モデルの力学

図 3.2 または図 3.3 をモデルとする力学系の微小振動に対して正準形式の理論をつくろう．簡単のため，各質点の質量と静止のときの質点間距離はすべて等しいものとし，それぞれ，m と a で表す．また，どのばねも等しいばね定数 K をもつとしよう．図 3.2 の縦波モデルに対しては，i 番目質点の位置を鎖上の 1 次元変数 $\xi_i(t)$ によって表せば，微小振動のラグラン

ジアンとして,

$$L=T-V=\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\dot{\xi}_i{}^2-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{K}{2}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2 \tag{3.38}$$

を設定することができる. N は質点の数である. 両端の質点には隣の質点からのばね力以外の力は働かないとした. 開放端問題だ. 図3.3の横波モデルの場合, 変数 $\xi_i(t)$ として i 番目質点の静止の位置から上下方向への変位を選ぶ. 微小振動である限り斜め方向への変位は無視できるから, $i+1$ 番目質点と i 番目質点との距離の2乗は $a^2+(\xi_{i+1}-\xi_i)^2$ となり, 定数項を無視すれば, この場合のラグランジアンも式(3.38)によって与えられる. どちらの問題でも, 外力など上記以外の力があれば, それに相当する付加項を加える必要がある. また, 両端または一方の端点が固定されている場合などでは, 適当な境界条件を拘束条件としておかなければならない.

さて, ξ_k に正準共役な運動量 p_k と一般力 F_k は,

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_k}=m\dot{\xi}_k \qquad (k=1,2,\cdots\cdot,N) \tag{3.39}$$

$$F_k=\frac{\partial L}{\partial\xi_k}=-K(\xi_k-\xi_{k-1})+K(\xi_{k+1}-\xi_k)$$
$$(k=2,3,\cdots\cdot,N-1) \tag{3.40a}$$

$$F_1=\frac{\partial L}{\partial\xi_1}=-K(\xi_1-\xi_2),\qquad F_N=\frac{\partial L}{\partial\xi_N}=-K(\xi_N-\xi_{N-1}) \tag{3.40b}$$

であり, ラグランジュの方程式は,

$$m\ddot{\xi}_k+K(\xi_k-\xi_{k-1})-K(\xi_{k+1}-\xi_k)=0$$
$$(k=2,3,\cdots\cdot,N-1) \tag{3.41a}$$

$$m\ddot{\xi}_1+K(\xi_1-\xi_2)=0,\qquad m\ddot{\xi}_N+K(\xi_N-\xi_{N-1})=0 \tag{3.41b}$$

となる. ルジャンドル変換は $\dot{\xi}_k=p_k/m$ だから, ハミルトニアンとして,

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m}p_i{}^2+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{K}{2}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2 \tag{3.42}$$

が得られる．このハミルトニアンの与える正準方程式が式(3.41)に一致することはいうまでもない．運動方程式(3.41)は各質点の座標が結合した連成振動を与えるが，3.1節の方程式を適用して基準振動を求めることができる．初等線形代数の知識と技術があれば，それほど難しい問題ではない．読者自身が試みていただきたい（章末問題）．

3.2.2 連続体の力学と正準形式

ここで，$L=aN$ を固定して $N\to\infty$ および $a\to 0$ の極限をとれば，N 個の質点系から物質が連続的に分布している無限自由度の力学系，すなわち，連続体に移る．鎖から弦への移行である．L は弦の長さだ．静止しているときの直線状の弦に沿って1次元 x 座標をとれば，上記の質点番号 k（または i）は弦上の点 x に対応し，質点 の変位 $\xi_k(t)$ は時刻 t における点 x での弦の変位を表す**波動関数** $\psi(x,t)$ によっておき換えられる．この移行に際しては，

$$\rho=\frac{m}{a},\qquad \varkappa=Ka \tag{3.43}$$

を有限に保ちながら $a\to 0$，$m\to 0$，$K\to\infty$ をとる必要がある．微小量 a を x の微小増分 $\mathrm{d}x$ と考えて $m=\rho\,\mathrm{d}x$ とおけば，ρ は弦上の質量分布を表す密度関数であることがわかる．一方，$\varkappa$ は弦の強さを与えるパラメーターだ．いまの場合，いずれも，弦上で一様な定数となっている．ラグランジアンや運動方程式の移行は次式を使って行われる．

$$\lim_{a\to 0}\dot{\xi}_k(t)=\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t},\qquad \lim_{a\to 0}\ddot{\xi}_k(t)=\frac{\partial\psi^2(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.44a}$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{\xi_{k+1}(t)-\xi_k(t)}{a}=\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} \tag{3.44b}$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left\{\frac{\xi_{k+1}(t)-\xi_k(t)}{a}-\frac{\xi_k(t)-\xi_{k-1}(t)}{a}\right\}=\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.44c}$$

式(3.44)と $a=\mathrm{d}x$ を使えば，式(3.38)はただちに弦という連

続体に対するラグランジアン,

$$L=\int_{-L/2}^{L/2}\bar{L}\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\,; \tag{3.45a}$$

$$\bar{L}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \tag{3.45b}$$

に変り，式(3.41)は運動方程式,

$$\rho\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}-\varkappa\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0 \tag{3.46a}$$

に変身する．質点の数 N が有限の場合は（式(3.41b)のように）両端点を特別扱いしたが，連続体に移行すれば（$a\to0$ のために）その必要はなくなる．なお，ここでは弦が x軸上区間 $[-L/2, L/2]$ に置かれているとした．弦の中点に座標系の原点を置いたのである．$\bar{L}$ を**ラグランジアン密度**という．いま議論している弦の問題では，式(3.45b)のように $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial t$ だけの簡単な関数になった．しかし，一般には，式(3.45a)で書いたように $\bar{L}$ は ψ，$\partial\psi/\partial x$，$\partial\psi/\partial t$ の関数である．$\bar{L}$ を積分した L は ψ と $\partial\psi/\partial t$ の普通の意味での関数ではない．それらの関数形の関数，すなわち，**汎関数**である．汎関数であることを強調するため，$L[\psi, \partial\psi/\partial t]$ という記法が使われている．

$v^2=(\varkappa/\rho)$ とおいて式(3.46a)を書き直せば,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0 \tag{3.46b}$$

となる．これは古来有名な**波動方程式**だ．定数 v は波動の速度を表すものだが，その役割や波動方程式自身の内容的な議論は3.2.3項で行う．

さて，連続体力学では理論体系の正準形式はどうなるか？これがこの小節の問題である．すでに連続体のラグランジアンは積分形(3.45)で与えられている．一般座標としては ξ_k の移行先である波動関数 $\psi(x,t)$ をとるのが自然だろう．とすれば，それに正準共役な運動量と一般力は式(3.39)と式(3.40)の $a\to0$ による極限,

$$p_k(t)=m\dot{\xi}_k(t) \xrightarrow[a\to 0]{} \rho\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x \tag{3.47a}$$

$$F_k=Ka^2\frac{1}{a}\left(\frac{\xi_{k+1}-\xi_k}{a}-\frac{\xi_k-\xi_{k-1}}{a}\right) \xrightarrow[a\to 0]{} \varkappa\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x \tag{3.47b}$$

になるが，これらは $\mathrm{d}x$ に比例する微小量だ．微小量をそのまま扱うのは不便だから，次式によって運動量密度 $\pi(x,t)$ と力密度 $\eta(x,t)$ を導入しよう．

$$\pi(x,t)\equiv\rho\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \qquad \eta(x,t)\equiv\varkappa\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.48}$$

密度関数で書けば，運動方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi(x,t)=\eta(x,t) \tag{3.49}$$

となる．いまの場合，これは波動方程式(3.46)を与える．

では，運動量密度 $\pi(x,t)$ および力密度 $\eta(x,t)$ とラグランジアン L またはラグランジアン密度 $\overline{L}$ とを直接結び付ける関係は何か？　まず，運動量密度について考える．移行の経過を正確にたどろう．鎖モデルのラグランジアン，

$$L(\xi,\dot{\xi})=\sum_i a\left\{\left(\frac{\rho}{2}\right)\dot{\xi}_i^2+(1-\delta_{iN})\left(\frac{K}{2a}\right)(\xi_{i+1}-\xi_i)^2\right\}$$

は移行 $a=\mathrm{d}x\to 0$ によって連続体のラグランジアン，

$$L\left[\psi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]=\int\overline{L}\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x=\lim_{a\to 0}\sum_i \mathrm{d}x\overline{L}\left(\psi_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right)$$

に変るので（ψ_i は i 番目鎖点での波動関数の値），前者の｛　　｝内が後者の $\overline{L}$ に移行していたはずだ．L を特定番号 k の $\dot{\xi}_k$（すなわち $\dot{\psi}_k$）について偏微分して得た正準運動量の移行先が $a\pi(x,t)$ だから，

$$\pi(x,t)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_k(t)}=\lim_{a\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{a\varepsilon}\{L(\dot{\xi}_k+\varepsilon)-L(\dot{\xi}_k)\}$$

$$=\frac{\partial\overline{L}}{\partial\{\partial\psi(x,t)/\partial t\}} \tag{3.50}$$

である（ただし，点 x は鎖の k 番目質点の位置に対応する座標）．これがラグランジアン密度 $\bar{L}$ と正準運動密度 π との関係だ．式(3.50)の導出経過は一般的なもので，L または $\bar{L}$ の具体形によらない．

一方，ラグランジアン L との関係も式(3.50)第1列の式から求めることができる．しかし，それには**汎関数微分**という手段を導入しなければならない．しばらく汎関数微分をめぐる数学的な話をしよう．一般に，関数 f の汎関数 $u[f]$ が与えられたとする．このとき，関数 g と実数パラメーター ε を与えて引数を f から $f+\varepsilon g$ に変更すれば，$F(\varepsilon)=u[f+\varepsilon g]$ は ε の関数となる．これが ε の関数として微分可能であるとき，その1階導関数を，

$$F'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(u[f+\varepsilon g]-u[f])=\int\frac{\delta u[f]}{\delta f(x')}g(x')\mathrm{d}x' \qquad (3.51\mathrm{a})$$

とおいて，右辺の $\delta u[f]/\delta f(x)$ を $f(x)$ による汎関数 $u[f]$ の汎関数微分と定義するのである．同様にして2階以上の汎関数微分も定義できる．

$$F''(0)=\iint\frac{\delta^2 u[f]}{\delta f(x')\delta f(x'')}g(x')g(x'')\mathrm{d}x'', \qquad \cdots\cdot$$

$$F^{(s)}(0)=\int\cdots\cdot\int\frac{\delta^s u[f]}{\delta f(x_1)\cdots\cdot\delta f(x_s)}g(x_1)\cdots\cdot g(x_s)\mathrm{d}x_1\cdots\cdot\mathrm{d}x_s$$

$$(3.51\mathrm{b})$$

上下限は明記しなかったが，積分は x の変域全体について行う（以下同様）．上記の弦の場合は上限が $L/2$，下限が $-L/2$ であった．この汎関数微分も，通常の微分と同じように，線形演算でありライプニッツの公式を満足する．すなわち，$u[f]$ と $v[f]$ を関数 f の汎関数，α を定数とすれば，

$$\frac{\delta}{\delta f(x)}(u[f]+v[f])=\frac{\delta u[f]}{\delta f(x)}+\frac{\delta v[f]}{\delta f(x)}$$
$$\frac{\delta}{\delta f(x)}\alpha u[f]=\alpha\frac{\delta u[f]}{\delta f(x)} \qquad (3.52)$$

$$\frac{\delta}{\delta f(x)}u[f]v[f]=\frac{\delta u[f]}{\delta f(x)}v[f]+u[f]\frac{\delta v[f]}{\delta f(x)}$$

証明はいずれも簡単である.

関数自身 $f(x)$ も引数 x を固定すれば汎関数と考えられるので（関数形の関数），$u[f]=f(x)$ とおけば，$F(\varepsilon)=u[f+\varepsilon g]=f(x)+\varepsilon g(x)$ であり，定義(3.51)によってその汎関数微分を計算することができる.

$$g(x)=\int\frac{\delta f(x)}{\delta f(x')}g(x')\mathrm{d}x' \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\delta f(x)}{\delta f(x')}=\delta(x'-x) \tag{3.53}$$

ただし，$\delta(x'-x)$ はディラックの**デルタ関数**である．デルタ関数 $\delta(x)$ は $x\neq 0$ でゼロ，$x=0$ で無限大になるという特異関数だが，本性は点関数ではなく線形汎関数の1種である**超関数**だ．むしろ，有限1価連続関数 $g(x)$ に対する積分，

$$g(x)=\int\delta(x'-x)g(x')\mathrm{d}x' \tag{3.54}$$

によって定義されたと考える方がよい．ただし，積分は x を含む区間について行うものとする．なお，デルタ関数の具体的性質については巻末文献と章末問題を参照されたい.

汎関数微分を使えば，ラグランジアン L と正準運動量密度 $\pi(x,t)$の関係はただちに得られる．式(3.50)の第1列最後にある鎖モデルの式は特定番号 k の速度に微小増分 $\dot{\xi}_i\rightarrow\delta_{ik}(\dot{\xi}_k+\varepsilon)$ を与えたときの L の変化率だが，連続体への移行の後では，これは $f=(\partial\psi/\partial t)$ の汎関数であるラグランジアン $L[f]$ が微小増分 $f(x')\rightarrow f(x')+\varepsilon g(x')$（ただし，$g(x')=\delta(x'-x)$）に対してもつ変化率に等しい．これは汎関数微分 $\delta L/\delta(\partial\psi/\partial t)$ にほかならない．この場合，$a\rightarrow 0$ によって連続体へ移行する際の対応 $i\rightarrow x'$，$k\rightarrow x$，および，

$$\frac{1}{a}\delta_{ik} \quad \xrightarrow[a\to 0]{} \quad \delta(x'-x) \tag{3.55}$$

を考慮に入れた．こうして，ラグランジアンから直接正準運動量密度を与える公式として次式が得られる．

$$\pi(x,t)=\frac{\delta L}{\delta\{\partial\psi(x,t)/\partial t\}} \tag{3.56}$$

右辺の L に式 (3.45a) を入れて具体的に汎関数微分を実行すれば，

$$\int\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x',t)/\partial t\}}\frac{\delta}{\delta\{\partial\psi(x,t)/\partial t\}}\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial t}\mathrm{d}x'$$
$$=\int\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x',t)/\partial t\}}\delta(x'-x)\mathrm{d}x'=\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x,t)/\partial t\}}$$

となり，式(3.50)と同じ結果を得る．第1等式では $(\partial\psi/\partial t)$ の自分自身による汎関数微分に対して式(3.53)を用い，最後に式(3.54)を使った．式(3.56)は導出経過から見てもわかるように，一般の連続体に対しても，ラグランジアンから直接正準運動量密度を与える公式として成立する．弦の場合はラグランジアン密度が式(3.45b)だから，式(3.56)が式(3.48)第1式を与えることは明らかだ．

同様の道筋をたどれば，力密度に対する一般的な定義式，

$$\eta(x,t)=\frac{\delta L}{\delta\psi(x,t)}$$
$$=\int\left\{\frac{\partial\bar{L}}{\partial\psi(x',t)}\frac{\delta\psi(x',t)}{\delta\psi(x,t)}+\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x',t)/\partial x'\}}\frac{\delta}{\delta\psi(x,t)}\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial x'}\right\}\mathrm{d}x'$$
$$=\frac{\partial\bar{L}}{\partial\psi(x,t)}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x,t)/\partial x\}} \tag{3.57}$$

に到達する．第2列では式(3.53)を用い，部分積分を実行した．ラグランジアン密度が式(3.45b)の場合はただちに式(3.48)第2式が出てくる．

このような経過によって，質点系のラグランジュ方程式は連続体に対するラグランジュの方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\{\partial\psi(x,t)/\partial t\}}-\frac{\delta L}{\delta\psi(x,t)}=0 \tag{3.58a}$$

または,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x,t)/\partial t\}}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\{\partial\psi(x,t)/\partial x\}}-\frac{\partial\bar{L}}{\partial\psi(x,t)}=0 \tag{3.58b}$$

に移行することがわかる．ラグランジュの立場では，連続体力学は ψ と $\partial\psi/\partial t$ を独立な力学変数とし，式(3.58)を運動方程式としてもつ．

一方，ハミルトンの立場の連続体力学では，正準力学変数として(ψ,π)をとる．π は式(3.56)によって与えられているが，$\partial\psi/\partial t$ を ψ と π で書き直すルジャンドル変換が可能でなければならない．この場合も有限可算個の質点系から連続体への移行を丹念にたどれば，ハミルトニアン H とハミルトニアン密度 $\bar{H}$ の定義式，

$$H=\int\pi(x,t)\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x-L \tag{3.59a}$$

$$=\int\bar{H}\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial x},\pi\right)\mathrm{d}x\ ; \tag{3.59b}$$

$$\bar{H}\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial x},\pi\right)=\pi\frac{\partial\psi}{\partial t}-\bar{L} \tag{3.59c}$$

に到達する．もちろん，式(3.59)の右辺ではすべての $\partial\psi/\partial t$ を ψ と π で書き換えておく必要がある．式(3.59b)，(3.59c)では一般の連続体を考慮して，$\bar{H}$ を ψ，$\partial\psi/\partial x$，π の関数として書いておいた．式(3.45b)のラグランジアンで記述される弦の場合，ルジャンドル変換は $\partial\psi/\partial t=\pi/\rho$ であり，ハミルトニアン密度は，

$$\bar{H}=\frac{1}{2\rho}\pi^2+\frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \tag{3.60}$$

となる．

ハミルトニアン密度 $\bar{H}$ が弦上のエネルギー分布の密度関数

を表していることはいうまでもない．すなわち，弦の微小区間 $(x, x+\mathrm{d}x)$ に分布しているエネルギーは $\bar{H}(\partial\psi/\partial x, \pi)\mathrm{d}x$ である．しかし，ハミルトニアンとかハミルトニアン密度という以上，H や $\bar{H}$ には，エネルギーやエネルギー密度を与えるばかりでなく，力学変数 (ψ, π) の時間的変動を生成する演算子の役割があるはずだ．その役割はまず質点系の正準方程式から移行した連続体のハミルトンの正準方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t)=\frac{\delta H}{\delta\pi(x, t)}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\pi(x, t)=-\frac{\delta H}{\delta\psi(x, t)} \tag{3.61}$$

によって与えられる．式(3.61)は上と同様の方法で導くことができる．

さらに，2章の方式にならい，この役割を連続体に対するポアッソンかっこ式を使って定式化しよう．力学変数 (ψ, π) の汎関数 $u[\psi, \pi]$ と $v[\psi, \pi]$ に対するポアッソンかっこ式の定義(2.67)はいまの場合，

$$\{u, v\}=\int\left\{\frac{\delta u}{\delta\psi(x, t)}\frac{\delta v}{\delta\pi(x, t)}-\frac{\delta u}{\delta\pi(x, t)}\frac{\delta v}{\delta\psi(x, t)}\right\}\mathrm{d}x \tag{3.62}$$

に移行する．これで定義されたポアッソンかっこ式も式(2.70)を満足している．正準変数どうしのポアッソンかっこ式は，

$$\begin{aligned}&\{\psi(x, t),\ \ \psi(x', t)\}=0\\&\{\pi(x, t),\ \ \pi(x', t)\}=0\\&\{\psi(x, t),\ \ \pi(x', t)\}=\delta(x-x')\end{aligned} \tag{3.63}$$

であるが，これは式(3.62)と式(3.53)によって直接証明される．もちろん，質点系の式(2.71)から対応(3.55)を通して導くこともできる．ポアッソンかっこ式を使えば，任意の力学量汎関数 $F[\psi, \pi, t]$ の運動方程式は式(2.68)と同形のまま成立することは明らかだ．

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F, H\} \tag{3.64}$$

さらに式(2.77)と式(2.79)に対応して，

$$\frac{\delta}{\delta\psi(x,t)}F=\{F,\pi(x,t)\},\qquad \frac{\delta}{\delta\pi(x,t)}F=\{\psi(x,t),F\}$$
(3.65)

も成立する．

具体的なポアッソンかっこ式の計算は F や H の汎関数形と式(3.63)を使って行われる．例えば，ハミルトニアン密度(3.60)をもつ弦の場合，運動方程式(3.64)は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}&=\{\psi(x,t),\ H\}=\int\left\{\psi(x,t),\ \frac{1}{2\rho}\pi^2(x',t)\right\}\mathrm{d}x'\\&=\int\frac{1}{2\rho}[\pi(x',t)\{\psi(x,t),\ \pi(x',t)\}\\&\qquad+\{\psi(x,t),\ \pi(x',t)\}\pi(x',t)]\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{\rho}\pi(x,t)\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi(x,t)}{\partial t}&=\{\pi(x,t),\ H\}=\int\left\{\pi(x,t),\ \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial x'}\right)^2\right\}\mathrm{d}x'\\&=\varkappa\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

となり，たしかに式(3.49)，すなわち，式(3.46)を与える．

上記の汎関数微分はすべて x の関数についての微分である．時間変数 t はあくまでも固定されたパラメーターにすぎない．$\psi(x,t)$，$\pi(x,t)$，$\partial\psi(x,t)/\partial t$ などによる汎関数微分を行ったが，x の関数としての汎関数微分であり，決して x と t の関数としての微分ではないことに注意してほしい．ただし，x と t の関数としての汎関数微分微分を考えることもできる．その場合，定義式(3.51)は x' と t' についての積分であり，式(3.53)は次式でおき換えられる．

$$\frac{\delta f(x,t)}{\delta f(x',t')}=\delta(x'-x)\delta(t'-t)\tag{3.66}$$

まとめておこう．連続体の力学系でも，ラグランジアンまたはラグランジアン密度を与えることによってモデルが確定し，運動方程式はラグランジュの方程式(3.58)によって与えられる．これは力学変数として$(\psi, \partial\psi/\partial t)$を選んだラグランジュの立場である．他方，式(3.56)によって正準運動量密度を導入し正準変数の組(ψ, π)を力学変数としてとれば，ハミルトンの正準方程式(3.61)または式(3.64)を運動方程式としてもつハミルトンの立場に移る．

この小節では1次元連続体だけを扱ったが，正準形式自体は3次元の場合もまったく同様に定式化できる．形式上の拡張は自明だろう．

3.2.3　弦の振動

波動方程式(3.46)にもどり，この方程式が表している弦の自由振動を解析しよう．ピアノやギターの弦の振動を想像すればよい．この方程式を$t=0$での初期条件，

$$\psi(x,0)=f(x), \qquad \left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0}=F(x) \tag{3.67}$$

のもとで解きたい．波動関数$\psi(x,t)$は時刻tにおける点xでの弦の（平衡の位置からの）変位だから，$f(x)$は初期位置分布を表し，$F(x)$は初速度分布を与える．通常，ピアノやギターの弦は両端$x=\pm(L/2)$が固定されているので，波動関数や初期分布は境界条件，

$$\psi(\pm L/2, t)=0,\ \ f(\pm L/2)=0,\ \ F(\pm L/2)=0 \tag{3.68}$$

に従わなければならない．

この種の問題を解く一般的方針は次の通りである．まず，式(3.46)の演算子$\partial^2/\partial x^2$に目をつけて，固有値方程式，

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_n(x)}{\mathrm{d}x^2}=(-k_n{}^2)u_n(x) \tag{3.69}$$

を設定する．ただし，固有関数$u_n(x)$には波動関数と同じ境界条件，

$$u_n(\pm L/2)=0 \tag{3.70}$$

を与える．式(3.69)の一般解は $u_n(x)=A\sin k_n(x+(L/2))+B\cos k_n(x+(L/2))$ であるが，この境界条件のため，B はゼロであり k_n は $\sin k_n L=0$ を満足する実数 $n\pi/L$ (n は自然数) でなければならない．こうして，演算子 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ の固有値 $(-k_n{}^2)$ とそれに属する固有関数 $u_n(x)$ が得られる．

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_n\left(x+\frac{L}{2}\right); \qquad k_n=\frac{n\pi}{L} \qquad (n=1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.71}$$

ただし，定係数の値 $A=\sqrt{2/L}$ は規格化条件，

$$(u_n, u_n)=\int_{-L/2}^{L/2}|u_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=1 \tag{3.72}$$

を満足するように選んだ．線形同次型の固有値方程式は係数まで決めてくれないので，便宜上このような規格化条件をおいたのである．左辺のかっこ記号は関数内積を表すものだが，一般に，二つの関数 $u(x)$ と $v(x)$ の内積は，

$$(u, v)\equiv\int_{-L/2}^{L/2}u^*(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.73}$$

によって定義されている．$*$ は複素共役を表す．しかし，いまの問題では実数関数だけを扱っているので省略してよい．こうして，境界条件(3.70)に従う固有値問題(3.69)の解(3.71)が求められた．n はモード番号である．各モードの固有関数は両端でゼロとなる**定在波**を表しているが，これは境界条件(3.70)の直接の結果だ．なお，奇数番号 $n=1, 3, \cdots\cdots$ の固有関数は偶関数 $u_n(-x)=u_n(x)$ でありパリティ(+)をもち，偶数番号 $n=2, 4, \cdots\cdots$ の固有関数は奇関数 $u_n(-x)=-u_n(x)$ でありパリティ(−)をもつ（2章問題参照）．これはラグランジアンと境界条件の空間反転対称性の結果である．

さて，式(3.71)と式(3.73)によって，相異なる二つの固有値 $(-k_n{}^2)$ と $(-k_{n'}{}^2)$ に属する固有関数 $u_n(x)$ と $u_{n'}(x)$ の内

積を計算すれば，容易に$(u_n, u_{n'})=0$となることがわかる．これをu_nと$u_{n'}$が直交するという．この直交性は演算子$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$が境界条件(3.70)のもとで自己共役になることの反映である．一般に，自己共役演算子の固有値は実数であり，異なる固有値に属する固有関数は直交する(章末問題)．ともかく，固有関数(3.71)は直交規格化条件，

$$(u_n, u_{n'})=\delta_{nn'} \tag{3.74}$$

を満足する関数列$\{u_n\}$を構成する．$\delta_{nn'}$はクロネッカーのデルタ記号（$n=n'$のとき1，$n\neq n'$のとき0）である．この関数列は固有関数と同じ境界条件に従う任意の関数$\psi(x, t)$をフーリエ型級数，

$$\psi(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)u_n(x)\,; \qquad \xi_n(t)=(u_n, \psi) \tag{3.75}$$

に展開することができる．係数を与える第2式は，級数の両辺と固有関数との内積をつくり式(3.74)を使って導いた．式(3.75)が任意のψに対して成立するとき，関数列$\{u_n\}$は完全であるといい，完全性条件，

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)u_n{}^*(x')=\delta(x-x') \tag{3.76}$$

を満足する．これは式(3.75)第1式に第2式を入れ，和と積分の順序を交換した後式(3.53)を利用して出した．

関数$\psi(x, t)$が波動方程式に従う場合，式(3.75)を式(3.46b)に代入すれば，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\sum_{n'=1}^{\infty}\{\ddot{\xi}_{n'}(t)+(v^2k_{n'}{}^2)\xi_{n'}(t)\}u_{n'}(x)=0$$

となる．この式と$u_n(x)$との内積をとれば，式(3.74)によって係数ξ_nの方程式，

$$\ddot{\xi}_n(t)+\omega_n{}^2\xi_n(t)=0\,; \qquad \omega_n{}^2\equiv v^2k_n{}^2 \tag{3.77}$$

が得られる．これは1次元調和振動子の運動方程式だ．すなわち，各モードの時間的振動は互いに独立な調和振動になること，いい換えれば，展開係数ξ_nが3.1節の意味での弦の基準

座標になりうることを物語っている．式(3.77)に初期条件 $\xi_n(0)=\alpha_n$，$\dot{\xi}_n(0)=\beta_n$ を与えて解けば，

$$\xi_n(t)=\alpha_n\cos\omega_n t+\frac{\beta_n}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{3.78}$$

であり，波動関数の時間・空間的変動は，

$$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\omega_n t+\frac{\beta_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin k_n\left(x+\frac{L}{2}\right) \tag{3.79}$$

によって与えられる．この式と式(3.67)を見比べれば，ξ_n の初期値 α_n，β_n は初期分布 $f(x)$，$F(x)$ の $\{u_n\}$ による展開係数であることがわかる．

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n(x),\qquad F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n u_n(x)\,; \tag{3.80a}$$

$$\alpha_n=(u_n,f),\qquad \beta_n=(u_n,F) \tag{3.80b}$$

すなわち，初期分布は式(3.80b)によって ξ_n の初期値 α_n，β_n を与え，それを係数としてもつ式(3.79)が元の初期条件(3.67)に対する波動方程式(3.46)の解となるわけである．式(3.79)は定在波振動の重ね合せだが，すでに述べたとおり，これは両端固定の境界条件の直接の結果だ．

次に，展開式(3.75)を式(3.45b)と式(3.60)に入れ，弦のラグランジアンとハミルトニアンを ξ_n で書き表してみよう．計算の途上で，固有値方程式(3.69)と直交規格化条件(3.74)から導かれる関係式，

$$\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u_{n'}}{\partial x}\mathrm{d}x=-\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}u_{n'}\mathrm{d}x=k_n{}^2\delta_{nn'}$$

を利用すれば，ただちに，

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho}{2}(\dot{\xi}_n{}^2-\omega_n{}^2\xi_n{}^2) \tag{3.81a}$$

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}p_{\xi_n}{}^2+\rho\omega_n{}^2\xi_n{}^2\right) \tag{3.81b}$$

という表式が得られる．$p_{\xi_n}=\partial L/\partial\dot{\xi}_n=\rho\dot{\xi}_n$ は ξ_n に正準共役な運動量．3.1節の形式と比べていえば $\sqrt{\rho}\,\xi_n$ が弦の基準座標 ($p_{\xi_n}/\sqrt{\rho}$ がそれに正準共役な運動量)である．なお，ξ_n の解(3.78)を式(3.81b)に代入すれば，エネルギーは，

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho}{2}(\omega_n{}^2\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2) \tag{3.82}$$

となる．初期分布の形によって各モードの係数 α_n，β_n の相対的強弱が決るが，各モードへのエネルギー配分は式(3.82) から知ることができるわけだ．

ところで，式(3.80b)を式(3.79)に代入し，n についての和と内積の積分との順序を交換し，$u_n(x)$ の具体形を使って整理したうえで式(3.76)を利用すれば，

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x-vt)+f(x+vt)\}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}F(x')\mathrm{d}x' \tag{3.83}$$

という式が出てくる．これは解を直接初期分布で表したものだが，固定端境界条件(3.68)以外の場合でも波動方程式の解として一般的に成立する．式(3.83)は波動方程式の解が変数 $(x\pm vt)$ だけを引数とする関数の重ね合せになっていることを示している．その意味を考えよう．例えば，関数 $f(x-vt)$ は $t=0$ での形 $f(x)$ を変えずに，速度 v で x 軸の正方向に進行する波を表す．波動方程式に含まれているパラメーター v は波動の速度であった．

以上は自由振動問題であるが，弦を構成する各質点に外力，

$$V^{(E)}=-\sum_{i=1}^{N}F^{(E)}{}_i\,\xi_i \quad \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \quad -\int_{-L/2}^{L/2}\varkappa g(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x \tag{3.84}$$

が作用する場合について補足しておこう．ただし，連続体への移行 $a\to 0$ に際して，$F^{(E)}{}_i\to\varkappa a g(x,t)$ となるとした．この場合，波動方程式は，

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=g \tag{3.85}$$

となり，展開係数 ξ_n は強制振動の方程式，

$$\ddot{\xi}_n+\omega_n{}^2\xi_n=g_n\,; \qquad g_n=v^2(u_n,\,g) \tag{3.86}$$

に従う．この解法は初等力学の問題である．なお，$g(x,\,t)$ を波動の源泉分布とよぶことがある．波動源 $g(x,\,t)$ が存在するとき，式(3.83)の右辺には次の項が付加される．

$$\frac{v}{2}\int_0^t \mathrm{d}t'\int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')}\mathrm{d}x'g(x',\,t') \tag{3.87}$$

さて，固定端境界条件はきびしすぎて，そのままでは開放端問題などの他の境界条件に対応できない．また，その固有関数は定在波を表すには便利だが，一般には，進行波型の解がほしい場合もある．それらの問題に対応するには，周期性境界条件が便利だ．すなわち，式(3.69)と同じ形の固有値問題に式(3.70)とは違う周期性境界条件，

$$u_n(x+L)=u_n(x) \tag{3.88}$$

を設定する．L が周期である．式(3.69)の解は $\exp(\pm ik_nx)$ であるから，$\exp(i2\pi n)=1$ を考慮すれば（n は整数），今回の固有値問題の解は，

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{1}{L}}\exp(ik_nx)\,; \qquad k_n=\frac{2\pi n}{L}$$

$$(n=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\cdots\cdot) \tag{3.89}$$

によって与えられる．係数は規格化条件 $(u_n,\,u_n)=1$ によって決めた．$(u_n,\,u_{n'})=0\ (n\neq n')$ も明らかであり，直交規格化条件(3.74)と完全性条件(3.76)は同じ形で成立する．式(3.89)は進行波型の固有関数である．進行波というわけは，時間因子 $\exp(-i\omega t)$ と組み合せたとき $\exp[i(k_nx-\omega t)]$ となり，($k_n>0$，$\omega>0$ のとき）x 軸の正方向に波長 $\lambda=(2\pi/k_n)$ と振動数 $\nu=(\omega/2\pi)$ をもって進行する平面波を表すからだ．ただし，この固有関数は複素数であることに注意してほしい．

同じ周期性境界条件 $\psi(x+L, t)=\psi(x, t)$ に従う任意関数 $\psi(x, t)$ は式(3.89)の固有関数列 $\{u_n\}$ によって式(3.75)と同形の級数に展開することができる．具体形は，

$$\psi(x, t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{L}}\exp(ik_nx)\,\xi_n(t) \tag{3.90a}$$

$$\xi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L/2}^{L/2}\exp(-ik_nx')\,\psi(x', t)\,\mathrm{d}x' \tag{3.90b}$$

である．ξ_n は一般に複素数になるが，$\psi(x, t)$ が実数であれば，実数条件，

$$\xi_n{}^*=\xi_{-n} \tag{3.91}$$

が成立する．$\psi(x, t)$ が波動方程式に従うとき，係数 ξ_n はやはり式（3.77）と同形の方程式を満足し（ただし，$k_n{}^2=(2\pi n/L)^2$），初期値問題の解として式(3.78)を与える．式(3.83)と式(3.87)もそのままの形で成立する．ここでは繰り返さない．読者自ら試みていただきたい．

実数条件(3.91)が成立するとき，

$$\xi_0=\frac{\sqrt{L}}{2}a_0,\qquad \xi_n=\frac{\sqrt{L}}{2}(a_n-ib_n),\qquad \xi_{-n}=\frac{\sqrt{L}}{2}(a_n+ib_n) \tag{3.92}$$

とおいて式(3.90)を書き直せば（a_n, b_n は実数），

$$\psi(x, t)=\frac{1}{2}a_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(t)\cos\frac{2\pi nx}{L}+b_n(t)\sin\frac{2\pi nx}{L}\right\}; \tag{3.93a}$$

$$a_n(t)=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\psi(x, t)\cos\frac{2\pi nx}{L}\mathrm{d}x\qquad (n=0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.93b}$$

$$b_n(t)=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\psi(x, t)\sin\frac{2\pi nx}{L}\mathrm{d}x\qquad (n=1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.93c}$$

となる．式(3.90)は進行波型の固有関数による展開だが，こ

れは定在波型の固有関数 $\cos(2\pi nx/L)$，$\sin(2\pi nx/L)$ による展開だ．式(3.90)および式(3.93)を**フーリエ級数**という．

有限領域$[-L/2, L/2]$から無限領域（$-\infty, \infty$）への移行は次のようにして行われる．極限 $L\to\infty$ をとるので，k_n 分布の間隔 $\Delta k_n=(2\pi/L)\Delta n=2\pi/L$ は無限小となり，k_n は（$-\infty, \infty$）を変域とする連続変数 k に移行する．これに応じて，固有値問題(3.69)の固有値$(-k^2)$は連続的に分布し（$-\infty$，0）の間の値をとる．固有関数は $\exp(ikx)$ に比例するが，$|\exp(ikx)|=1$ のため無限領域での絶対値2乗積分を1に規格化することはできない．そこで $\sqrt{L/2\pi}\,u_n(x)$ の移行先を $u_k(x)$ と書き，これを規格化された固有関数として採用しよう．すなわち，

$$u_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx) \tag{3.94a}$$

このとき，直交規格化条件(3.74)と完全性条件(3.76)は，

$$(u_k, u_{k'})=\delta(k-k'), \qquad \int_{-\infty}^{\infty}u_k(x)u_k{}^*(x')\mathrm{d}k=\delta(x-x') \tag{3.94b}$$

によっておき換えられる．任意関数 $\psi(x, t)$ の固有関数列 $\{u_k\}$ による展開は，

$$\psi(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k, t)u_k(x)\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx)\phi(k, t)\mathrm{d}k\,; \tag{3.95a}$$

$$\phi(k, t)=(u_k, \psi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ikx)\psi(x, t)\mathrm{d}x \tag{3.95b}$$

と書くことができる．式(3.95b)を $\psi(x, t)$ から $\phi(k, t)$ へのフーリエ変換，式(3.95a)を $\phi(k, t)$ から $\psi(x, t)$ へのフーリエ逆変換という．$\phi(k, t)$ を $\psi(x, t)$ のフーリエ成分ということがある．式(3.95a)と式(3.95b)はたしかに式(3.90a)と式(3.90b)からの $L\to\infty$ による移行だ（ただし，$\sqrt{L/2\pi}\,\xi_n(t)\to\phi(k, t)$）．

なお，式(3.95b)を式(3.95a)に代入すれば，**フーリエの積分定理，**

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\ e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\ e^{-ikx'}\psi(x',t) \tag{3.96}$$

が得られる．いずれも初等フーリエ解析で知られている関係式である．

$\psi(x,t)$ が波動方程式を満足する場合，フーリエ成分 $\phi(k,t)$ の方程式と解は，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\omega^2\phi=0\,; \qquad \phi(k,t)=\alpha(k)\cos\omega t+\frac{\beta(k)}{\omega}\sin\omega t \tag{3.97}$$

となることは明らかだろう．ただし，$\omega=vk$ であり，$\alpha(k)$ と $\beta(k)$ はそれぞれ初期分布 $f(x)$ と $F(x)$ のフーリエ成分であることはいうまでもない．この場合も式(3.83)と式(3.87)はまったく同じ形で成り立つ．その証明も読者にまかせる．

連続体の振動や波動の伝搬・放射などの研究は上記のようなフーリエ解析を駆使して行われることが多い．しかし，波動現象への深入りはこの本の守備範囲を越えるので，これ以上の説明は専門書にまかせる．この節の主目的は連続体に対しても力学の正準形式が適用できることを示すところにあった．1次元連続体に話を限ったが，3次元連続体への形式的拡張は自明であろう．

3.3　電磁場と荷電粒子

真空中の電磁場とその中を運動する荷電粒子に対する力学体系の正準形式を研究しよう．そのためには，まず，電磁場の基礎法則であるマクスウェルの方程式の構造を知る必要がある．

3.3.1　マクスウェルの方程式と電磁ポテンシャル

時刻 t，空間点 $\boldsymbol{r}$ で電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，磁場の強さ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ をもつ真空中の電磁場はマクスウェルの方程式，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{3.98a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{3.98b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{3.98c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \tag{3.98d}$$

に従う．ρ は電荷密度，$\boldsymbol{J}$ は電流密度であり，電荷保存則を表す連続の式，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{3.99}$$

を満足している．ここではガウス単位系（電気関係の量に対してはcgs静電単位，磁気関係の量に対してはcgs電磁単位を使う混合単位系）を用いたので換算定数 c が出てきた．c は後で光速度（$\simeq 3\times 10^{10}$ cm/s）であることがわかる．真空中の電磁現象を記述するには，この単位系が最も簡単なので用いた．詳しい説明をしている余裕はないが，式(3.98a)はクーロンの法則（またはガウスの法則），式(3.98b)は磁気単極が存在しないという法則，式(3.98c)はアンペールの法則，式(3.98d)はファラデーの電磁誘導の法則を表している．

ベクトル $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ は合計6個の成分をもつので，電磁場には関数6個分の自由度があるかのように見える．しかし，違う．電磁場の自由度を見るには，電磁ポテンシャルによる表現が便利だ．ベクトル解析の恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ を利用すれば，ただちに式(3.98b)の一般解 $\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ が得られる．$\boldsymbol{A}$ は任意のベクトル関数である．これを式(3.98d)に入れれば $\nabla\times(\boldsymbol{E}+c^{-1}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t))=0$ となるので，恒等式 $\nabla\times\nabla\phi=0$ により，一般解は $\boldsymbol{E}+c^{-1}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t))=-\nabla\phi$ となる．ϕ は任意のスカラー関数である．まとめて書けば，ϕ と $\boldsymbol{A}$ による電磁場の表現，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.100}$$

が得られる．ϕ を**スカラーポテンシャル**，$\boldsymbol{A}$ を**ベクトルポテ**

ンシャル，両者を総合して**電磁ポテンシャル**という．$(\phi, \boldsymbol{A})$ だけで電磁場を表せたので，自由度は多くても関数 4 個分だ．しかし，電磁ポテンシャルと電磁場の対応は 1 対 1 ではなく，自由度はもう一つ減る．なぜならば，任意のスカラー関数 χ を用いた変換，

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi, \qquad \phi \longrightarrow \phi'=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{3.101}$$

を行って $(\phi, \boldsymbol{A})$ を別の電磁ポテンシャル $(\phi', \boldsymbol{A}')$ で書き直しても，電磁場 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ はまったく変らないからである．すなわち，電磁場の方から見れば，電磁ポテンシャルの中でスカラー関数 χ に相当する部分が不要であった．電磁場の真の自由度は関数 3 個分だったのである．変換(3.101)を**ゲージ変換**という．すなわち，電磁場はゲージ変換に対して不変である．これを電磁ポテンシャルの側から見れば，ゲージ関数 χ だけの不定性があることになる．この意味で，電磁場，特に電磁ポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$ を**ゲージ場**ということがある．電磁場の表現(3.100)とゲージ変換(3.101)に対する不変性は，電磁場中を運動する荷電粒子の力学体系の構築にとっても重要である．

さて，式(3.100)を式(3.98a)と式(3.98c)に代入すれば，ϕ と $\boldsymbol{A}$ に対する方程式，

$$\nabla^2\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-4\pi\rho \tag{3.102a}$$

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}-\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{3.102b}$$

が得られる．しかし，このままでは ϕ と $\boldsymbol{A}$ が分離されていないので，方程式の性格が見にくい．だが，ゲージ関数 χ の不定性を利用して式 (3.102) を整形することができる．例えば，χ をうまく選んで，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{3.103}$$

が成立するようにしよう．方法は次の通りである．はじめに選

んだ電磁ポテンシャル$(\phi', \boldsymbol{A}')$が式(3.103)を満足しなかったとしても，すなわち，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'+c^{-1}(\partial\phi'/\partial t)\equiv g\neq 0$ であっても，ゲージ変換(3.101)によって$(\phi, \boldsymbol{A})$に移れば，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+c^{-1}(\partial\phi/\partial t)=g-\{\nabla^2\chi-c^{-2}(\partial^2 x/\partial t^2)\}$ であるから，この右辺がゼロになるようにゲージ関数 χ を選んでおけばよい．式(3.103)を**ローレンツ条件**という．不定関数 χ を決めることをゲージ固定またはゲージの選択という．いまはローレンツ条件を与える**ローレンツゲージ**を選んだわけである．ローレンツ条件を使えば，式(3.102a)，(3.102b)は，

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho \tag{3.104a}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{3.104b}$$

となることは明らかだ．ただし，第2式の導出に際しては，$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$ を用いた（この式は3次元ラプラシアン $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ を使う限り，直角座標系でしか成立しないことに注意）．3.2節の議論を3次元空間に拡張して考えればわかるように，これは ρ，$\boldsymbol{J}$ を源泉分布とする波動方程式であり，c がその波動の伝搬速度を与える．いうまでもなく，電磁波動の方程式である．光は電磁波だから，c は光速度にほかならない．

式(3.104a)を時間微分して c で割り，式(3.104b)の発散と加えれば，式(3.99)により，

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=0 \tag{3.105}$$

が得られる．これは量 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+c^{-1}(\partial\phi/\partial t)$ が波動方程式を満足していることを示している．したがって，ローレンツ条件(3.103)はこの量とその1階時間微分が初期時刻でゼロであれば，それ以後のすべての時間に対して成立する．すなわち，ローレンツ条件は場の方程式と矛盾しない．ゲージ条件の無矛盾性に電荷保存則(3.99)がかかわっていることは興味深い．

方程式(3.104a), (3.104b)はきれいな形をしているが，ローレンツ条件のため，ϕ と $\boldsymbol{A}$ のすべての成分が独立に波動性をもつはずはない．$\boldsymbol{A}$ はベクトルであるから，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を満たす横波成分と $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ に従う縦波成分に分解できる．ローレンツ条件はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の縦波成分 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ がスカラーポテンシャル ϕ（の時間微分）と相殺することを要求している．とすれば，はじめから $\boldsymbol{A}$ には横波しか含まれないようなゲージ条件，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{3.106}$$

を要求してもよい．これを**クーロンゲージ**という．実際，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'\neq0$ の $\boldsymbol{A}'$ から，適当な χ をもつゲージ変換(3.101)によって，式(3.106)に従う $\boldsymbol{A}$ をつくることができる（証明は読者にまかせよう）．この条件を使えば，式(3.102)は，

$$\nabla^2\phi=-4\pi\rho \tag{3.107a}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}} \tag{3.107b}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}-\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{3.108}$$

とおいた．$\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}$ は $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}=0$ を満足するので，$\boldsymbol{J}$ の横電流成分だ．したがって，クーロン条件と場の方程式との無矛盾性は証明される．式(3.107a)に従う ϕ は電荷分布 ρ がつくる瞬間的静電場のポテンシャルであり，明らかに波動性はない．波動性をもつのはベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ であり，これには横波しかない．こうして，電磁波は横波であることがわかった．

電荷，電流のない場合には，ゲージ関数 χ を適当に選んで，

$$\phi=0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{3.109}$$

とすることができる．証明は簡単だ．したがって，電磁場は，

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.110}$$

であり，場の方程式は，

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.111}$$

となる．もちろん，$\boldsymbol{A}$ は横波である．

3.3.2　荷電粒子の運動法則

さて，電磁場 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ の中にある電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{J}$ をもつ連続体に働く電磁力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{EM}}$ およびその密度 $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{EM}}$ は，

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{EM}}(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{EM}}(\boldsymbol{r}', t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\,; \tag{3.112a}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{EM}}(\boldsymbol{r}', t) = \rho(\boldsymbol{r}', t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}', t) \tag{3.112b}$$

である．ただし，Ω はこの連続体が分布する領域だ．式(3.112)を**ローレンツ力**という．電流 $\boldsymbol{J}$ が速度 $\boldsymbol{v}$ をもつ物質素片の力学的運動による電荷の移動だけで構成されている場合，微小面積素片 $\Delta\boldsymbol{s}$ を微小時間 Δt 中に通過する電荷 $\Delta Q = \rho(\boldsymbol{v} \cdot \Delta\boldsymbol{s}\Delta t)$ は $\boldsymbol{J} \cdot \Delta\boldsymbol{s}\Delta t$ に等しいはずだから，

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t) = \boldsymbol{v}(t)\rho(\boldsymbol{r}', t) \tag{3.113}$$

が成立する．

これからは，電荷 e_i，質量 m_i をもつ N 個の質点系の運動を取り扱う（$i=1, 2, \cdots\cdots, N$）．1個の点電荷 e_i の電荷密度は3次元デルタ関数を使って $\rho_{(i)}(\boldsymbol{r}', t) = e_i\delta^3(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_{(i)}(t))$ と書くことができる．この関数は $\boldsymbol{r}_{(i)}$ 以外ではゼロ，$\boldsymbol{r}'$ について全空間積分すれば電荷 e_i を与えるので，たしかに点電荷の密度分布関数を表している．こうして，この質点系の電荷，電流密度の式，

$$\rho(\boldsymbol{r}', t) = \sum_{i=1}^{N} e_i\delta^3(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_{(i)}(t)) \tag{3.114a}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t) = \sum_{i=1}^{N} e_i\boldsymbol{v}_{(i)}(t)\delta^3(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_{(i)}(t)) \tag{3.114b}$$

が得られた．この分布関数はたしかに連続の式(3.99)を満足している．

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}', t)=\sum_{i=1}^{N} e_i \frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_{(i)}(t))$$

$$=-\sum_{i=1}^{N} e_i \dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}\cdot\nabla'\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_{(i)}(t))$$

$$=-\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t)$$

したがって，i 番目質点に働くローレンツ力は，

$$\boldsymbol{F}_{(i)\mathrm{EM}}(t)=e_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{(i)}(t), t)+\frac{e_i}{c}\boldsymbol{v}_{(i)}(t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_{(i)}(t), t) \tag{3.115}$$

であり，運動方程式は，

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{(i)}=-\nabla_{(i)}V+\boldsymbol{F}_{(i)\mathrm{EM}} \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{3.116}$$

と書くことができる．ただし，非電磁力としては保存力，$-\nabla_{(i)}V$ だけを考慮に入れた．保存力以外の非電磁力を入れてもよいが，その場合への拡張は容易だろう．

式(3.115)に式(3.100)を入れ，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}, \qquad \nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{3.117}$$

を利用すれば，式(3.116)は，

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{(i)}=-\nabla_{(i)}\left\{V+e_i\phi-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{v}_{(i)}\cdot\boldsymbol{A}\right\}-\frac{e_i}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \tag{3.118}$$

となる．ϕ と $\boldsymbol{A}$ は質点の位置での電磁ポテンシャルだ．右辺最後の項で $A_j(\boldsymbol{r}_{(i)})=\partial(\boldsymbol{v}_{(i)}\cdot\boldsymbol{A})/\partial v_{(i)j}$ という式を使い，各質点の位置座標 $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{r}_{(N)})$ と速度 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{(N)})$ の成分を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_{3N})$，$v=(v_1, v_2, \cdots, v_{3N})$ のように通し番号を付けて書けば（さらに対応して $A_k=A_j(\boldsymbol{r}_{(i)})$ と書けば），右辺の力のうち $-\nabla_{(i)}V$ 以外の項 $\boldsymbol{Q}$ は，

$$Q_k=-\frac{\partial U}{\partial x_k}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_k}\,; \quad (k=1, 2, \cdots, 3N) \tag{3.119a}$$

$$U=\sum_{i=1}^{N}\left\{e_i\phi-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{v}_{(i)}\cdot\boldsymbol{A}\right\} \tag{3.119b}$$

となることがわかる．これは式(2.36)とまったく同形だ．したがって，電磁場中の荷電粒子の運動に対するラグランジアンは式(2.37)により，

$$L=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}{}^2-e_i\phi(\boldsymbol{r}_{(i)},t)+\frac{e_i}{c}\boldsymbol{v}_{(i)}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_{(i)},t)\right\}$$
$$-V(\boldsymbol{r}_{(i)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(N)}) \tag{3.120}$$

である．

ラグランジアンが決ったので，2章で定式化した手続きに従って正準形式の理論体系をつくることができる．x_k に正準共役な運動量は式(2.21)によって

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k}=m_k\dot{x}_k+\frac{e_k}{c}A_k \qquad (k=1,2,\cdots,3N) \tag{3.121a}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{p}_{(i)}=m_i\dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}+\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_{(i)}(t),t) \tag{3.121b}$$

である．正準運動量はニュートンの運動量 $m\dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}$ ではなく式(3.121)であることに注意していただきたい．そのため，独立な力学変数の組を $(x,\dot{x})$ から (x,p)（ただし，$p=(p_1,p_2,\cdots,p_{3N})$）に変更するルジャンドル変換は，

$$\dot{x}_k=\frac{1}{m_k}\left(p_k-\frac{e_k}{c}A_k\right) \qquad (k=1,2,\cdots,3N) \tag{3.122}$$

によって与えられる．したがって，ハミルトニアンは式(2.48)により，

$$H(x,p,t)=\sum_{k=1}^{3N}p_k\dot{x}_k-L$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_i}\left(p_{(i)}-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_{(i)},t)\right)^2+e_i\phi(\boldsymbol{r}_{(i)},t)\right\}$$
$$+V(\boldsymbol{r}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(N)}) \tag{3.123}$$

となるわけだ．ラグランジアンが$L=T-V$，ハミルトニアン

が $H=T+V$ とは書けない場合の重要な例だ．運動方程式(3.116)は，ラグランジュの立場ではラグランジアン(3.120)が与えるラグランジュの方程式から，ハミルトンの立場ではハミルトニアン(3.123)が与える正準方程式として出てくることはいうまでもない．読者自身で確かめていただきたい．なお，ϕ，A，V が時間変数 t に陽に依存しなければ，H は保存量となる．

結果的には，電磁場のない場合のハミルトニアン，

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}\boldsymbol{p}_{(i)}{}^2+V \tag{3.124}$$

に対しておき換え，

$$\boldsymbol{p}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{p}_{(i)}-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_{(i)},t), \qquad V \longrightarrow V+\sum_{i=1}^{N}e_i\phi(\boldsymbol{r}_{(i)},t) \tag{3.125}$$

を実行して得られたものが電磁場中の荷電粒子のハミルトニアンである．経過からみてわかるように，これはゲージ不変な理論体系をつくるための最も簡単な手続きである．この方法で得られた電磁場と荷電粒子の相互作用を**最小相互作用**とよぶことがある．

さて，2.3節では，ラグランジアンに関数 $X(q,t)$ の全微分 $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ を加えた場合，すなわち，式(2.93)によってラグランジアンを変更した場合，正準運動量とハミルトニアンは式(2.95a)，(2.95b)のように変るが，運動方程式はまったく変らないことを見た．ここで，

$$X=\sum_{i=1}^{N}\frac{e_i}{c}\chi(\boldsymbol{r}_{(i)},t) \tag{3.126}$$

とおいて，いまの場合の式(2.95a)，(2.95b)を書けば，

$$\boldsymbol{p}_{(i)}{}'=\boldsymbol{p}_{(i)}+\frac{e_i}{c}\nabla_{(i)}\chi=m\dot{\boldsymbol{r}}_{(i)}+\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}' \tag{3.127a}$$

$$H'(x,p',t)=H\left(x,p'-\frac{\partial X}{\partial x'},t\right)-\frac{\partial X}{\partial t}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_i}\left(\boldsymbol{p}_{(i)}-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}'\right)^2+e_i\phi'\right\}+V \tag{3.127b}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi$，$\phi'=\phi-c^{-1}(\partial\chi/\partial t)$．したがって，ラグランジアンに $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ を加えた効果はすべてこの $\boldsymbol{A}'$ と ϕ' に吸収されてしまった．$(\phi,\boldsymbol{A})\rightarrow(\phi',\boldsymbol{A}')$ はゲージ変換(3.101)にほかならない．この結果は電磁場がゲージ不変であり，運動方程式(3.116)のローレンツ力もゲージ不変であることから見れば当然だろう．2.3節の変換(2.93)はゲージ変換だったのである．

このように，電磁場中の荷電粒子に対する力学体系はゲージ不変である．2章では，力学体系がある変換に対して不変であれば，保存則が存在するという話をした．では，ゲージ変換に付随する保存則は何か？　それは電荷保存則だ．この事情を見るため，ラグランジアン(3.120)にもどり，電磁場と荷電粒子の相互作用の項を電荷，電流の密度関数 ρ，$\boldsymbol{J}$ で書き直そう．

$$L_{\mathrm{INT}}=\int_{\Omega}\left[-\rho(\boldsymbol{r}',t)\phi(\boldsymbol{r}',t)+\frac{1}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}',t)\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{3.128}$$

式(3.114)をこの式に入れれば，ただちに式(3.120)の電磁相互作用項になる．だが，式(3.114)が電荷保存則(3.99)を満足していることはすでにわかっている．その知識を使わずに，すなわち，ρ と $\boldsymbol{J}$ が式(3.99)を満足することがわかっていない時点にもどって，ラグランジアンのゲージ不変性を要求し，電荷保存則(3.99)を導出しよう．式(3.128)にゲージ変換(3.101)を施し，部分積分などを行って整理すれば，

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{INT}}=&\int_{\Omega}\left\{-\rho\phi'+\frac{1}{c}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}'\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\&+\frac{1}{c}\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}+\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)\right\}\chi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{c}\int_{\Omega}\rho\chi\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned} \tag{3.129}$$

となる．ただし，Ω を包む閉曲面上で ρ，$\boldsymbol{J}$ がゼロであるとし

て，$\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\nabla\chi \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = -\int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{J})\chi \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$ を用いた．式(3.129)の最後の項は全微分だから運動方程式には何の影響も与えない．ゆえに，理論体系がゲージ不変であるためには，すなわち，ゲージ関数 χ に依存しないためには，第2項の $\{\cdots\cdot\}$ 内がゼロでなければならない．これはまさに電荷保存則 (3.99)だ．逆に式(3.99)があれば，運動方程式は χ に依存しない．

3.3.3 電磁場の正準形式

連続体力学に対する正準形式の理論体系は3.3.2項で定式化した．ここでは，電磁場に対しても正準形式の理論ができることを示そう．簡単のため，物質分布のない電磁場の自由振動を扱う．さて，やや天下り的だが，電磁場のラグラジアンとして，

$$L_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega (\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r}', t) - \boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r}', t))\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{3.130}$$

を与えよう．ここで式(3.109)，(3.110)のゲージを選択し，$\boldsymbol{E} = -(1/c)(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ および $\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ を式(3.130)に代入し，$A_i(\boldsymbol{r}, t)(i=1,2,3)$ を力学変数と考える．3.3.2項の方式を援用すれば，A_i に正準共役な運動量密度と一般力密度はそれぞれ，

$$\pi_i(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\delta L_{\mathrm{EM}}}{\delta\{\partial A_i(r, t)/\partial t\}} = \frac{1}{4\pi c^2}\int_\Omega \frac{\partial A_i(\boldsymbol{r}', t)}{\partial t}\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial A_i(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{3.131a}$$

$$\eta(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\delta L_{\mathrm{EM}}}{\delta A_i(\boldsymbol{r}, t)}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \nabla'\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}', t)\cdot\nabla'\times\boldsymbol{e}_i\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t))_i \tag{3.131b}$$

によって与えられる．$\boldsymbol{e}_i$ は x_i 軸方向の単位ベクトル．したがって，ラグランジュの方程式 $(\partial\pi_i/\partial t)=\eta_i$ は，

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0 \tag{3.132}$$

となる．これから $\partial^2(\nabla\cdot\boldsymbol{A})/\partial t^2=0$ が得られるので，ある時刻で $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ とその1階微分がゼロであれば，以後すべての時間について横波条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ が成立する．ゆえに，$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla^2\boldsymbol{A}$ であり，式(3.132)は波動方程式(3.111)に帰着する．

一方，正準理論の与えるハミルトニアンは，

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{EM}}&=\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}\pi_i(\boldsymbol{r}',t)\frac{\partial A_i(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'-L_{\mathrm{EM}}\\&=\frac{1}{8\pi}\int_\Omega\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)^2+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',t)^2\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned} \tag{3.133}$$

となり，電磁気学で導かれている電磁場のエネルギーに一致する．正準変数に対するポアッソンかっこ式(2.71)または式(3.63))はいまの場合，

$$\begin{aligned}&\{A_i(\boldsymbol{r},t),A_j(\boldsymbol{r}',t)\}=\{\pi_i(\boldsymbol{r},t),\pi_j(\boldsymbol{r}',t)\}=0\\&\{A_i(\boldsymbol{r},t),\pi_j(\boldsymbol{r}',t)\}=\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{3.134}$$

である．運動方程式(2.69)（または式(3.64)）を式(3.133)と式(3.134)で計算すれば，式(3.132)すなわち式(3.111)が出てくることはいうまでもない．読者自ら試みるとよい．

3.4　剛 体 の 運 動

質点系の特殊な例として剛体がある．物体を質点系と見たとき，構成要素である質点間の相互距離が一定に保れているものを**剛体**という．これは一種の拘束条件問題だ．日常私たちが目にする固体は，内部に多少存在する振動や変形を無視すれば，剛体と見なせる場合が多い．剛体は一つの理想的なモデルである．この節では剛体の運動を概観しよう．

3.4.1 剛体の力学変数

剛体の運動を知るには，剛体内の各点の位置と速度がわかればよい．その変動を記述するには，空間（慣性系）に固定した座標系K(Oxyz)と剛体に固定した座標系G(O$'x'y'z'$)を設定すると便利だ．座標系KおよびGの各座標軸方向の単位ベクトルをそれぞれ$(\boldsymbol{e}_{(1)}, \boldsymbol{e}_{(2)}, \boldsymbol{e}_{(3)})$，$(\boldsymbol{e}_{(1)}', \boldsymbol{e}_{(2)}', \boldsymbol{e}_{(3)}')$とすれば，座標系Kの原点から剛体内の点Pに引いた動径ベクトルは$\boldsymbol{r}=\sum_j x_j \boldsymbol{e}_{(j)}$，座標系Gの原点から点Pに引いた動径ベクトルは$\boldsymbol{r}'=\sum_k x_k' \boldsymbol{e}_{(k)}'$である．もちろん，$(x_1=x, x_2=y, x_3=z)$および$(x_1'=x', x_2'=y', x_3'=z')$は両座標系で見た点Pの座標にほかならない．いま，座標系Kで見た座標系Gの原点を$\boldsymbol{r}_0=\sum_j x_{0j}\boldsymbol{e}_{(j)}$とすれば，明らかに，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \tag{3.135}$$

が成立する（図3.4）．剛体の性質を考慮すれば，剛体の運動によって時間的に変動する量は剛体固定系Gの原点を表す3個の変数(x_{01}, x_{02}, x_{03})と座標軸方向の単位ベクトル$(\boldsymbol{e}_{(1)}', \boldsymbol{e}_{(2)}', \boldsymbol{e}_{(3)}')$だけである．一方，$(x_1', x_2', x_3')$は一定であるが，これが剛体を表す拘束条件にほかならない．しかし，同じ$\boldsymbol{r}'$を空間固定系Kで書けば（$\boldsymbol{r}'=\sum_k (x_k-x_{0k})\boldsymbol{e}_{(k)}$），その座標成分$(x_k-x_{0k})$は時間的に変動する．

この事情は点Pが剛体内のどこにあっても変らないので，剛体の運動は剛体固定系Gの原点O$'$の移動とそのまわりの回転によって完全に表すことができる．いうまでもないが，剛体の回転は剛体に固定した座標系の回転であり，剛体固定系Gと空間固定系Kの関係を与える回転行列$R_{kj}=\boldsymbol{e}_{(k)}'\cdot\boldsymbol{e}_{(j)}$によって表される．これは1.4節で勉強した座標回転の場合とまったく同じものだ．すなわち，R_{kj}は9個の成分をもつが，直交条件(1.54)のため独立成分は3個しかない．剛体の運動は計6個の変数で完全に記述されるのである．

これは大変な簡素化だ．身近の固体を原子・分子や結晶格子な

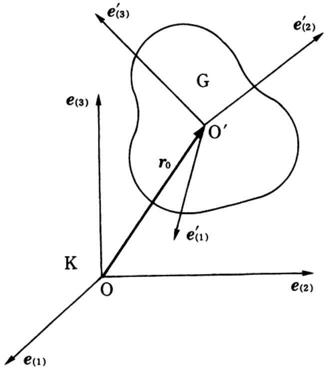


図 3.4　空間固定系Kと剛体固定系G

どの構成要素に分解すれば，質点の数 N はアボガドロ数（$\sim 10^{24}$）程度になるだろう．ていねいに書けば，その固体の運動は $3N$ 個の変数 $\boldsymbol{r}_{(i)}$ $(i=1, 2, \cdots\cdot, N)$ に対する式(1.18)のようなきわめて多数の運動方程式に支配されており，私たちは本来それを解かなければならなかったのである．それを考えれば，すべてがわずか 6 個の変数ですむという理想化，すなわち，剛体というモデルの効果はすばらしい．

次に，点Pの時間的変動を表す速度 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0/\mathrm{d}t+\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$ を考えよう．第 2 項 $\boldsymbol{r}'$ の時間的変動は，$x_k{}'$ ではなく，回転運動を行う $\boldsymbol{e}_{(k)}{}'$ から生れる．その回転運動の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ とすれば，式(1.72)（$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{(k)}{}'/\mathrm{d}t=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_{(k)}{}'$）によって，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\sum_{K=1}^{3}x_{(k)}{}'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{(k)}{}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{3.136}$$

となる．こうして，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{3.137}$$

が得られる．右辺第 1 項は剛体に固定した点 $\boldsymbol{r}_0$ の運動を表すものである．

固定点 $\boldsymbol{r}_0$ は剛体内のどこに置いてもよいが，しばしば，(i)物理振子やコマの支点などのような空間内で剛体を支える特定の固定点，または(ii)重心の位置 $\boldsymbol{R}$（式(1.25)を見よ）に選ばれることが多い．(i)の場合，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0/\mathrm{d}t=0$ であり，座標 K と G の原点を一致させておく方が便利だろう($\boldsymbol{r}_0=0$)．一方，剛体の性質上重心は剛体内に固定されているので，(ii)の場合の剛体の運動は，全質量が集中した一つの質点の運動に等価な重心運動と固定重心まわりの回転運動に分けられる．重心運動を改めてここで議論する必要はないと思う．両者いずれの場合も，剛体の運動の特色は第 2 項 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ が表す回転運動にあり，この節の興味の中心もそこにある．剛体の回転運動は 3 個の変数で表せるが，時間的な変化の割合も 3 個の成分をもつ角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ によって与えられるわけである．

よくご承知のように，座標系 K，G の座標軸方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{(k)}$，$\boldsymbol{e}_{(k)}'$ $(k=1,2,3)$ の関係は，

$$\boldsymbol{e}_{(k)}=\sum_{j=1}^{3}R_{jk}\boldsymbol{e}_{(j)}',\qquad R_{jk}=\boldsymbol{e}_{(j)}'\cdot\boldsymbol{e}_{(k)} \tag{3.138}$$

であるが，係数 R_{jk} を求めておく必要がある．一般に回転を表す 3 個の変数の上手な選び方としてオイラーの角がある．図 3.5 を見ていただきたい．回転行列は座標軸方向の単位ベクトルだけでつくられ，原点の位置には無関係なので，両座標系の原点を一致させておいてよい．まず，z' 軸（$\boldsymbol{e}_{(3)}'$軸）の方向を座標系 K で見た極角 θ（z' 軸と z 軸のなす角）と方位角 ϕ（zz' 平面と xy 平面との交線が x 軸とつくる角）で表す．次に，zz' 平面と $x'y'$ 平面（$\boldsymbol{e}_{(1)}'$，$\boldsymbol{e}_{(2)}'$ のつくる平面）の交線と x' 軸（$\boldsymbol{e}_{(1)}'$ 軸）のなす角を選び，ψ と書こう．3 個の角 θ，ϕ，ψ を指定すれば，両座標系の関係は確定する．これを**オイラーの角**という．いうまでもなく，剛体の回転運動はオイラーの角で完全に記述することができる．オイラーの角は剛体の配位を表す一種の一般座標だ．

回転行列 $R=(R_{ki})$ をオイラーの角 θ，ϕ，ψ で書いてみよ

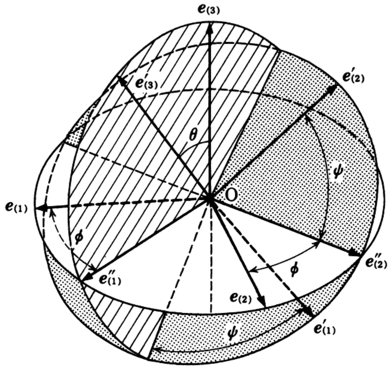


図3.5　オイラーの角

う．座標系Kをまず z 軸のまわりに角度 ϕ だけ回転して新しい座標系 K″(O$x''y''z''$) をつくり，次にその第2軸（単位ベクトル：$e_{(2)}{}'' = e_{(3)} \times e_{(3)}{}' / |e_{(3)} \times e_{(3)}{}'|$）のまわりに角度 θ の回転を行って座標系 K‴(O$x'''y'''z'''$) に変換し，最後にその第3軸のまわりに角度 ψ の回転を施せば，座標系Gに到達する．この3段階の回転を，各座標軸（1, 2, 3）のまわりの角度 α の回転行列 $R_k(\alpha)\,(k=1,2,3)$,

$$R_1(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_2(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_3(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.139}$$

によって書き表せば（1章問題参照），

$$R(\theta,\phi,\psi)=R_3(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) \tag{3.140a}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi & \cos\theta\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ -\cos\theta\cos\phi\sin\psi-\sin\phi\cos\psi & -\cos\theta\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.140b}$$

である．式(3.138)の R_{jk} は式(3.140b)の jk 要素である．

別種のオイラー角　このほかに，$\phi\to\phi-(\pi/2)$，$\psi\to\psi+(\pi/2)$ とおき直した ϕ，ψ を使って別のオイラー角を定義する方法もあるので注意してほしい．これは座標系 K から座標系 G に至る 3 個の回転の第 2 段として，新 x 軸のまわりの角度 θ の回転を選んだことに相当する．この場合，式(3.140a)は $R=R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)$ と書き直す必要がある．

次に，角速度ベクトルとオイラーの角の関係を求めておこう．単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の示す方向を回転軸とする微小角 $\delta\alpha$ の回転はベクトル $\boldsymbol{n}\delta\alpha$ によって表され，ベクトル加法に従うことが知られている．この微小回転のオイラー角表示を $\delta\theta$，$\delta\phi$，$\delta\psi$ とすれば，$\boldsymbol{n}\delta\alpha$ はそれぞれ $\boldsymbol{e}_{(3)}$，$\boldsymbol{e}_{(2)}''$，$\boldsymbol{e}_{(3)}'$ のまわりの微小回転 $\delta\phi$，$\delta\theta$，$\delta\psi$ を表すベクトルの合成に等しい．すなわち，

$$\boldsymbol{n}\delta\alpha=\boldsymbol{e}_{(3)}\delta\phi+\boldsymbol{e}_{(2)}''\delta\theta+\boldsymbol{e}_{(3)}'\delta\psi \tag{3.141}$$

に分解できる（$\boldsymbol{e}_{(2)}''$ の定義式は上記文中で与えておいた）．これから角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{n}\lim_{\delta t\to 0}(\delta\alpha/\delta t)$ に対する式，

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\phi}\boldsymbol{e}_{(3)}+\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{(2)}''+\dot{\psi}\boldsymbol{e}_{(3)}' \tag{3.142}$$

が得られる．式 (3.138) とそれが与える $\boldsymbol{e}_{(3)}\times\boldsymbol{e}_{(3)}'=R_{23}\boldsymbol{e}_{(1)}'-R_{13}\boldsymbol{e}_{(2)}'$ によって，$\boldsymbol{e}_{(3)}$ と $\boldsymbol{e}_{(2)}''$ は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{(3)}&=-\sin\theta\cos\psi\ \boldsymbol{e}_{(1)}'+\sin\theta\sin\psi\ \boldsymbol{e}_{(2)}'+\cos\theta\ \boldsymbol{e}_{(3)}' \\ \boldsymbol{e}_{(2)}''&=\sin\psi\ \boldsymbol{e}_{(1)}'+\cos\psi\ \boldsymbol{e}_{(2)}' \end{aligned} \tag{3.143}$$

となるので，剛体固定系 G による $\boldsymbol{\omega}(=\sum_k\omega_k'\boldsymbol{e}_{(k)}')$ の成分は，

$$\begin{aligned} \omega_1'&=-\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_2'&=\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi \end{aligned} \tag{3.144}$$

$$\omega_3' = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

と書くことができる．

擬座標　式(3.144)については補足的な注意が必要かも知れない．微小時間 $\mathrm{d}t$ 中の $\boldsymbol{e}_{(k)}'$ のまわりの微小回転角を $\mathrm{d}\xi_k = \omega_k'\,\mathrm{d}t$ とおけば，式(3.144)から，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi_1 &= -\mathrm{d}\phi\sin\theta\cos\psi + \mathrm{d}\theta\sin\psi \\ \mathrm{d}\xi_2 &= \mathrm{d}\phi\sin\theta\sin\psi + \mathrm{d}\theta\cos\psi \\ \mathrm{d}\xi_3 &= \mathrm{d}\phi\cos\theta + \mathrm{d}\psi \end{aligned} \tag{3.145}$$

が得られる．これは，$\mathrm{d}\theta = \dot{\theta}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\phi = \dot{\phi}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\psi = \dot{\psi}\mathrm{d}t$ とおいて，式(3.144)を式(3.141)にもどしたことに相当する．だが，式(3.145)は全微分形 $\mathrm{d}\xi_k = (\partial\xi_k/\partial\theta)\mathrm{d}\theta + (\partial\xi_k/\partial\phi)\mathrm{d}\phi + (\partial\xi_k/\partial\psi)\mathrm{d}\psi$ にまとめることはできず（証明は簡単だ），積分不可能である．すなわち，式(3.145)が与える $\mathrm{d}\xi_1$，$\mathrm{d}\xi_2$，$\mathrm{d}\xi_3$ という微分形式だけは存在するが，変数 ξ_1，ξ_2，ξ_3 は存在しない．これは，微小回転や角速度はベクトルになるが，一般の回転はベクトルでは表せないという事実の反映である．しかし，式(3.145)だけを用い，あたかも ξ_1，ξ_2，ξ_3 が一般座標として存在するかのように扱って，正準形式によく似た形の理論をつくることも可能である．このとき，これらの見掛け上の変数を**擬座標**という．この問題にはこれ以上立ち入らない．擬座標を使わなくても，式(3.144)によってラグランジアンを書けば，オイラー角についての正準理論を構成することができる．

3.4.2　運動方程式と慣性テンソル

さて，剛体を構成する質点の位置と質量をそれぞれ $\boldsymbol{r}_{(i)}$，$m_{(i)}$ としよう（$i=1,2,\cdots,N$）．これまでは剛体内の点Pを $\boldsymbol{r}'$ と書き，添字(i)をつけなかった．剛体の性質上，点Pについて述べたことはすべて $\boldsymbol{r}_{(i)}$ に対しても成り立つ．例えば，式(3.136)または式(3.137)において，$\boldsymbol{r}'$ は任意番号の $\boldsymbol{r}_{(i)}$ と

$\boldsymbol{r}_{(i)}{}'$ でおき換えることができる．この記法にもどって，一般的な質点系の運動方程式(1.18)を剛体に適用することを考えよう．番号 i についての和をとれば，全運動量 $\boldsymbol{P}$ に対する式(1.23a)が得られるが，これから重心座標 $\boldsymbol{R}$（式(1.25)を見よ：$\boldsymbol{R}=M^{-1}\sum_i m_{(i)}\boldsymbol{r}_{(i)}$，$M=\sum_i m_{(i)}$ は全質量）に対する方程式，

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}\;;\qquad \boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}_{(i)} \tag{3.146}$$

が出てくる．これは一般的な結果だが，剛体の場合，重心は剛体内に固定されていることに注意してほしい．いうまでもなく，重心は全質量が集中した質点として全外力の合成 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けて運動するわけである．

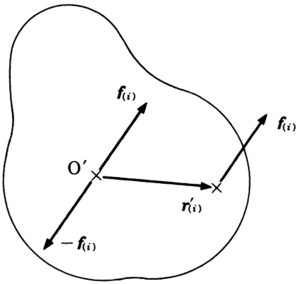


図 3.6　外力の分解

一方，角運動量は特定の点について定義すべきものだ．ここでは G の原点 O′ を特定の点に選ぶ．その上で点 $\boldsymbol{r}'_{(i)}$ に作用する力 $\boldsymbol{f}_{(i)}$ を，図 3.6 のように，点 O′ に働く等しい力 $\boldsymbol{f}_{(i)}$ と，点 $\boldsymbol{r}'_{(i)}$ と点 O′ に作用する力対（$\boldsymbol{f}_{(i)}$, $-\boldsymbol{f}_{(i)}$）でおき換える．この力対の能率 $\boldsymbol{T}_{(i)}=\boldsymbol{r}_{(i)}{}'\times\boldsymbol{f}_{(i)}$ が回転力である．すべての力について同様のおき換えをすれば，点 O′ に全外力 $\boldsymbol{F}$ が集中し，点 O′ のまわりに全回転力 $\boldsymbol{T}=\sum_i \boldsymbol{T}_i$ が作用することになる．この事情は点 O′ をどこに選ぼうと変らない．点 O′ のまわりの剛体の角運動量は，

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}{}'\times\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{3.147}$$

であり，運動方程式，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{T}\,; \qquad \boldsymbol{T}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_{(i)}{}'\times\boldsymbol{f}_{(i)} \tag{3.148}$$

が成立する（式(1.23b)参照）．式(3.146)と式(3.148)が剛体の運動の基礎方程式である．剛体という性質は，$\boldsymbol{r}_{(i)}{}'$ に対する3.4.1項の（$\boldsymbol{r}'$ に対して述べたような）拘束条件を通して取り入れられる．すべての質点の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は共通だ．私たちの第1の仕事は，それを考慮に入れ，式(3.148)を剛体回転の力学変数（角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ またはオイラーの角 θ，ϕ，ψ）によって書き表すことだ．

さて，3.4.1項で述べたように，私たちの興味は剛体に固定した点 $\boldsymbol{r}_0$（Gの原点）のまわりの回転運動にある．その運動を見るためだけならば，座標系KとGの原点を一致させておいてもよかろう（$\boldsymbol{r}_0$ の運動を考慮に入れることはそれほど面倒ではない．それは読者にまかせる）．この場合，$\boldsymbol{r}_0=0$，$\boldsymbol{r}_{(i)}=\boldsymbol{r}_{(i)}{}'$ であり，式(3.136)は式(3.137)に一致する．ただし，Kで見た $\boldsymbol{r}_{(i)}=\boldsymbol{r}_{(i)}{}'$ の成分（$x_{(i)1}, x_{(i)2}, x_{(i)3}$）は時間的に変動するのに対して，Gで見た成分（$x_{(i)1}{}', x_{(i)2}{}', x_{(i)3}{}'$）が一定であることはいうまでもない．この違いは時間微分を求めるとき，表面に出てくる．しかし，運動量，角運動量，エネルギーなどを剛体の力学変数で書く場合は，どちらの座標系を使っても同じ形の表式が得られるので，しばらくの間，座標変数のダッシュを伏せて話を進めよう．$x_{(i)k}$ から $x_{(i)k}{}'$ への変換およびその逆変換には式(1.53)を用いればよい．

剛体の運動量は，

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\boldsymbol{v}_{(i)}=\boldsymbol{\omega}\times\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\boldsymbol{r}_{(i)} \tag{3.149}$$

であるが（式(3.136)参照），重心座標 $\boldsymbol{R}$ で書き直せば，

$$\boldsymbol{P}=M\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R} \tag{3.150}$$

となる．点 $\boldsymbol{r}_0$ を重心に選べば $\boldsymbol{P}=0$ である．

角運動量 $\boldsymbol{L}$（式(3.147)）は $\boldsymbol{p}_{(i)}=m_{(i)}\boldsymbol{v}_{(i)}=m_{(i)}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{(i)}$ により，

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\boldsymbol{r}_{(i)}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{(i)})$$

$$=\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}[r_{(i)}{}^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}_{(i)}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_{(i)}] \tag{3.151}$$

である．これを成分で書けば，

$$L_k=\sum_{j=1}^{3}I_{kj}\omega_j \qquad (k=1,2,3) \tag{3.152}$$

ただし，

$$I_{kj}=J_k\delta_{kj}-K_{kj}; \qquad (k,j=1,2,3) \tag{3.153a}$$

$$J_k=\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}(r_{(i)}{}^2-x_{(i)k}{}^2) \tag{3.153b}$$

$$K_{kj}=(1-\delta_{kj})\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}x_{(i)k}x_{(i)j} \tag{3.153c}$$

L_k と ω_k はベクトルの成分であるから，I_{kj} は2階のテンソルの成分である．これを**慣性テンソル**という．対称性 $I_{kj}=I_{jk}$ は明らかだろう．なお，$I_{kk}=J_k$ を k番目座標軸のまわりの**慣性能率**（または**慣性モーメント**）といい，K_{kj} を**慣性乗積**という．

式(3.153b)，(3.153c)は質点系に対する式だが，連続体の場合に拡張することは容易である．それには，点 $\boldsymbol{r}$ のまわりの微小領域（体積 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$）にある質量を $\mathrm{d}m=\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ とおいて，質量密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を導入すればよい．このとき，J_k と K_{kj} は，

$$J_k=\int(r^2-x_k{}^2)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{3.153d}$$

$$K_{kj}=(1-\delta_{kj})\int x_kx_j\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{3.153e}$$

によって与えられる．$\rho(\boldsymbol{r})=\sum_i m_{(i)}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{(i)})$ とおけば，式(3.153d)，(3.153e)は式(3.153b)，(3.153c)にもどる．

重心の役割を知るため，$\boldsymbol{r}_{(i)}(=\boldsymbol{r}_{(i)}{}')=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\xi}_{(i)}$ とおいて

$(\sum_i m_{(i)}\boldsymbol{\xi}_{(i)}=0,\ \because \boldsymbol{R}=\sum_i m_{(i)}\boldsymbol{r}_{(i)}/\sum_i m_{(i)})$，重心から質点への動径ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{(i)}$ で角運動量や慣性テンソルを書き直してみよう．この分解により，角運動量は，

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}^0+\boldsymbol{L}^\xi;\quad \boldsymbol{L}^0=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{L}^\xi=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_{(i)}\times\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{3.154}$$

となる．$\boldsymbol{L}^0$ は点 O′ のまわりの重心の角運動量，$\boldsymbol{L}^\xi$ は重心のまわりの剛体の角運動量である．これに対応して，慣性テンソルも，

$$I_{kj}=I^0_{kj}+I^\xi_{kj}$$

と分解される．$I^0_{kj}=J^0_k\delta_{kj}-K^0_{kj}$ は点 O′ に関する重心の慣性テンソル，$I^\xi_{kj}=J^\xi_k\delta_{kj}-K^\xi_{kj}$ は重心についての剛体の慣性テンソルである．ただし，

$$J^0_k=M(R^2-R_k),\quad K^0_{kj}=(1-\delta_{kj})MR_kR_j \tag{3.155a}$$

$$J^\xi_k=\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}({\xi_{(i)}}^2-{\xi_{(i)k}}^2),\quad K^\xi_{kj}=(1-\delta_{kj})\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\xi_{(i)k}\xi_{(i)j} \tag{3.155b}$$

(R_1, R_2, R_3) は重心 $\boldsymbol{R}$ の座標成分を表す．連続体の場合の式を書くことは容易だろう．いずれにしても，はじめから重心に G の原点 O′ をとっておけば，$\boldsymbol{L}^0=0$，$I^0_{kj}=0$ である．

式(3.153)と式(3.155)では座標系の指定をしなかった．しかし，剛体固定系 G を使う方がよいに決っている．G における変数 $x_{(i)k}'(k=1,2,3)$ は時間的に変らないため，運動状態のいかんにかかわらず，一定の慣性テンソルが得られるからだ．一定の慣性テンソルの方が剛体の特性を表すものとしてはふさわしい．しかし，剛体の特性についてさらに踏み込んで議論するには，慣性テンソルの主軸問題を解かなければならない．

記述を簡単にするため，行列記法を採用しよう．$I_{kj}\,(k, j=1, 2, 3)$ を成分とする 3 行 3 列の行列を I，L_k および $\omega_k\,(k=1, 2, 3)$ を成分とする 3 行 1 列の列ベクトルを，それぞれ，L および ω と書けば，式(3.152)は簡単な行列式，

$$L=I\omega \tag{3.156}$$

になる．なお，I の転置行列 I^{T} は $I^{\mathrm{T}}{}_{kj}=I_{jk}$ を成分とする行列であり，対称性によって $I^{\mathrm{T}}=I$ が成立する．また，ω の転置行列 ω^{T} は成分 $\omega_k(k=1,2,3)$ をもつ1行3列の行ベクトルである．ダッシュを省いているが，L_k や ω_k は剛体固定系Gで見た成分なのである．

剛体の運動エネルギーは角速度ベクトルと慣性テンソルで書くことができ，

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\boldsymbol{v}_{(i)}{}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{(i)})^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_{(i)}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{(i)})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\omega_k I_{kj}\omega_j=\frac{1}{2}\omega^{\mathrm{T}}I\omega \tag{3.157}$$

となる（最後の式では行列記法を用いた）．I_{kj} が2階のテンソル，ω_k がベクトルだから，T は明らかに不変量（スカラー）である．これは当然だ．

さて，$\boldsymbol{v}_{(i)}\neq 0$ すなわち $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ に対して T は正でゼロにもならないので，I_{kj} は正値行列であり，T は I_{kj} を係数とする ω_1，ω_2，ω_3 の正値2次形式をつくる．ここで，行列 I の固有値問題，

$$IX^{\alpha}=\Lambda_{\alpha}X^{\alpha} \qquad \text{または} \qquad \sum_{j=1}^{3}I_{kj}X^{\alpha}{}_{j}=\Lambda_{\alpha}X^{\alpha}{}_{k} \tag{3.158}$$

を考えよう．Λ_α は I の固有値（$\alpha=1,2,3$），X^α はその固有値に属する固有ベクトル（成分 $X^{\alpha}{}_1, X^{\alpha}{}_2, X^{\alpha}{}_3$ をもつ3行1列の列ベクトル）である．一般に，対称正値行列は正の固有値をもち，その固有ベクトルは直交する．証明は簡単だ．固有値方程式に左から $X^{\alpha\mathrm{T}}$ を掛ければ，$\Lambda_\alpha=(X^{\alpha\mathrm{T}}IX^{\alpha})/(X^{\alpha\mathrm{T}}X_{\alpha})=\sum_k\sum_j X^{\alpha}{}_k I_{kj}X^{\alpha}{}_j/\sum_k|X^{\alpha}{}_k|^2$ が得られ，I の正値性から $\Lambda_\alpha>0$ がわかる．一方，式(3.158)に左から $X^{\beta\mathrm{T}}$ を掛け，$\Lambda^{\beta}(\neq\Lambda_\alpha)$ に対する固有値方程式の転置式 $X^{\beta\mathrm{T}}I=\Lambda_\beta X^{\mathrm{T}}$ に右から X^α を掛けて辺々引算すれば，$(\Lambda_\alpha-\Lambda_\beta)(X^{\beta\mathrm{T}}X^{\alpha})=0$ となり，これから直

交性$(X^{\beta \mathrm{T}} X^{\alpha}) = \sum_{k} X^{\beta}{}_{k} X^{\alpha}{}_{k} = 0$が得られる．

その固有ベクトルに適当な定数を掛けて，$(X^{\alpha \mathrm{T}} X^{\alpha}) = \sum_{k} |X^{\alpha}{}_{k}|^2 = 1$と規格しておけば，直交規格化条件，

$$X^{\beta \mathrm{T}} X^{\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \tag{3.159}$$

に従う固有ベクトル系$\{X^{\alpha}\}$が得られる．それをすべて使って，成分$U_{k\alpha} = X^{\alpha}{}_{k}(\alpha, k = 1, 2, 3)$をもつ3行3列の行列$U$を定義すれば，式(3.159)は直交条件，

$$U^{\mathrm{T}} U = 1 \tag{3.160}$$

となり，固有値方程式と式(3.159)によって，

$$U^{\mathrm{T}} I U = \bar{I} \tag{3.161}$$

が得られる．ただし，$\bar{I}$は固有値Λ_{α}を成分とする対角行列，

$$\bar{I}_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{3.162}$$

である．この操作は直交行列Uによる慣性テンソル行列Iの対角化であり，当然の結果として，対角部に固有値が並ぶ．その意味でΛ_1，Λ_2，Λ_3を慣性テンソルの**主値**ということがある．

そこで，角速度ベクトルに対して対角化変換，

$$\omega = U \bar{\omega} \qquad \text{または} \qquad \omega_j = \sum_{\alpha=1}^{3} U_{j\alpha} \bar{\omega}_{\alpha} \tag{3.163}$$

を導入すれば，運動エネルギーの式(3.157)は対角形式，

$$T = \frac{1}{2} \omega^{\mathrm{T}} I \omega = \frac{1}{2} \bar{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{I} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}{}^{2} \tag{3.164}$$

に移行する．

対角形式(3.164)の幾何学的意味を考えよう．ζ_1，ζ_2，ζ_3を直角座標変数（座標軸方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_{(k)}$；$k = 1, 2, 3$）とする3次元ユークリッド空間に，

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{kj} \zeta_k \zeta_j = \zeta^{\mathrm{T}} I \zeta = 1 \tag{3.165}$$

という曲面を描けば（第2辺では行列表示を使った），Iの正値性により，だ円体が得られる．これを**慣性だ円体**という．慣

性だ円体は選んだ座標系に無関係に定まっている．一般にだ円体は互いに直交する3本の主軸をもっているが，慣性だ円体の場合，主軸の方向は I の固有ベクトル $\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}=\sum_k \boldsymbol{e}_{(k)} X^\alpha{}_k (\alpha, k=1,2,3)$ によって与えられる．固有ベクトルの方向を**慣性主軸**という．Λ_1，Λ_2，Λ_3 は慣性主軸のまわりの慣性モーメントであり，**主慣性能率**または**主慣性モーメント**とよばれている．単位ベクトル $\bar{\boldsymbol{e}}_{(1)}$，$\bar{\boldsymbol{e}}_{(2)}$，$\bar{\boldsymbol{e}}_{(3)}$ が指定する座標系を $\overline{\mathrm{G}}$ としよう．元の変数 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を $\overline{\mathrm{G}}$ の変数 $(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}_3)$ で書き直せば，$\zeta=U\bar{\zeta}$（または，$\zeta_k=\sum_\alpha U_{k\alpha}\bar{\zeta}_\alpha : U_{k\alpha}=X^\alpha{}_k$）であるから，式(3.165)は式(3.161)よりだ円体方程式の標準形，

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha \bar{\zeta}_\alpha{}^2=\bar{\zeta}^{\mathrm{T}}\bar{I}\bar{\zeta}=1 \tag{3.166}$$

に移行する．主軸を座標軸に選んだためである．

変換(3.163)によって導入された変数 $\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$，$\bar{\omega}_3$ は座標系 $\overline{\mathrm{G}}$ で見たベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の成分にほかならない．同様に，$\overline{\mathrm{G}}$ における角運動量 $\boldsymbol{L}$ の成分を $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$ とすれば，すなわち，

$$\boldsymbol{\omega}=\sum_{\alpha=1}^{3}\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}\bar{\omega}_\alpha, \qquad \boldsymbol{L}=\sum_{\alpha=1}^{3}\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}\bar{L}_\alpha \tag{3.167}$$

と書けば，式(3.152)と式(3.156)は，

$$\bar{L}_\alpha=\Lambda_\alpha\bar{\omega}_\alpha \quad (\alpha=1,2,3), \qquad \bar{L}=\bar{I}\bar{\omega} \tag{3.168}$$

となってしまう．ただし，$L=U\bar{L}$ である．この表示では $\bar{I}$ に非対角要素はなく，慣性乗積はゼロとなる．しかし，慣性主軸を座標軸とする座標系 $\overline{\mathrm{G}}$ は剛体固定系であり，回転運動をしていることを忘れてはいけない．念のため．

したがって，式(3.167)第2式を時間微分し，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}=\boldsymbol{\omega}\times\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}$ を使って運動方程式(3.148)を書き換えれば，

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)^*+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T} \tag{3.169a}$$

が得られる．ただし，

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)^*=\sum_{\alpha=1}^{3}\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}\frac{\mathrm{d}\bar{L}_\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{3.169b}$$

回転力の $\overline{\mathrm{G}}$ による表示 $\boldsymbol{T}=\sum_{\alpha}\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}\overline{T}_{\alpha}$ と組み合せて，式(3.169a)を成分で書けば，**オイラーの方程式，**

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_1}{\mathrm{d}t}-(\Lambda_2-\Lambda_3)\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3=\overline{T}_1\\
&\Lambda_2\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_2}{\mathrm{d}t}-(\Lambda_3-\Lambda_1)\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1=\overline{T}_2\\
&\Lambda_3\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_3}{\mathrm{d}t}-(\Lambda_1-\Lambda_2)\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2=\overline{T}_3
\end{aligned}
\tag{3.170}
$$

に到達する．これが剛体の回転運動を支配する基礎的な方程式である．$\mathrm{G}=\overline{\mathrm{G}}$ ととることも可能だから，式(3.144)の ω_1'，ω_2'，ω_3' を $\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$，$\bar{\omega}_3$ に等置することができる．このとき，式(3.144)をオイラーの方程式に入れれば，式(3.170)は空間固定系 K で見た剛体の配位を表すオイラー角 θ，ϕ，ψ の運動方程式を与える．

以上見てきたように，剛体の回転の特性を代表するものは慣性テンソルである．慣性テンソルの性質を知るには，その主軸(単位ベクトル $\bar{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}$; $\alpha=1,2,3$)と固有値 $\Lambda_\alpha(\alpha=1,2,3)$ がわかればよい．これはかなり面倒な問題だが，物質分布が一様な場合は形状の対称性などから，ある程度の性質を推測することができる．二，三の簡単な場合について見ておこう．(i)$\overline{\mathrm{G}}$ において，原点中心の一様な球の場合は，明らかに $\Lambda_1=\Lambda_2=\Lambda_3$．(ii)$\overline{\mathrm{G}}$ において，第3軸のまわりに対称な場合は，$\Lambda_1=\Lambda_2$．(iii)固定された回転軸をもつ場合，すなわち，$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$ とおいたとき単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ が一定の場合，回転軸上に原点をとれば，

$$
T=\frac{1}{2}I\omega^2\,;\qquad I=\sum_{i=1}^{N}m_{(i)}[\boldsymbol{r}_{(i)}{}^2-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{(i)})^2]
\tag{3.171}
$$

である．I を $\boldsymbol{n}$ のまわりの慣性モーメントという（1.5.3項参照）．[　]内はベクトル $\boldsymbol{r}$ の先端から回転軸上に降した垂線の長さであり，一定値をとる．

3.4.3 具　体　例

a 固定軸のまわりの回転

空間固定系Kに固定された一直線のまわりの剛体の回転を考えよう．この直線を固定軸という．3.4.2項最後の (iii) の場合である．固定軸の方向を示す一定の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば，角速度は $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$ であり，角運動量は $\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$ と書くことができる．I は式(3.171)で与えられる固定軸のまわりの慣性モーメントである．この場合，座標系KとGは原点を共有し，固定軸を共通の第3軸とするように選ぶと便利だ．そのとき，剛体の回転はKとGの第1軸どうしのつくる角 ϕ によって完全に表せるからである．運動の自由度は1であり，角速度はただ一つの独立な力学変数 ϕ によって $\omega=\dot{\phi}$ と書くことができる．固定軸のまわりの回転の特殊性だ．したがって，運動方程式(3.148)は，

$$I\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}=T_3 \tag{3.172}$$

という簡単な形になる．1.5.3項の例題もこの特殊な場合である．T_3 は第3軸のまわりの回転力であり，これが ϕ の関数としてわかっていれば，後は微分方程式を解くだけの作業になる．

初等的な例題としては**物理振子**がある．これは一様な重力場内で水平固定軸を与えられた場合の剛体の運動だ．軸受けは滑らかであるとしよう．図3.7のように，固定軸をKとGの第3軸とし，鉛直線上方にKの第1軸正方向，それに垂直に第2軸をとる．両座標系の原点は，重心を乗せた鉛直平面を第3軸が貫く点に選ぶ．さらに，Gの第1軸を重心から原点に向かう直線にとれば，記述はかなり簡単になる．剛体の質量を M，固定軸と重心との距離を d とすれば，回転力は $T_3=-Mgd\times\sin\phi$ であり，式(3.172)は，

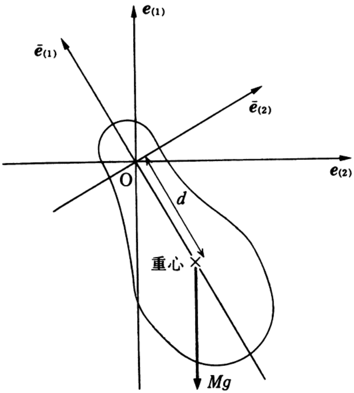


図 3.7　物理振子

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{Mgd}{I}\sin\phi=0 \tag{3.173}$$

となる．$r_0=(I/Md)$ とおけば，これは長さ r_0 の単振子の方程式と同形だ（1.5.3項を見よ）．

b　回転力がない場合の固定点のまわりの回転——自由回転剛体の運動

例えば，力の働かない自由空間を運動する剛体の重心のまわりの回転がその場合である．剛体の重心はGにおける固定点であり，そのまわりの回転力も自由空間では当然ゼロだからだ．地球の運動は，他の天体からの回転力を無視する近似では，この場合の一例と考えてよい．また，一様な重力場内で剛体の重心を滑らかな固定点で支えた場合の重心のまわりの回転運動もよい例だ．なぜならば，重心を原点として質点の位置を $\boldsymbol{\xi}_{(i)}(i=1,2,\cdots,N)$ と書けば，回転力は $\boldsymbol{T}=\sum_i\boldsymbol{\xi}_{(i)}\times(m_{(i)}g\boldsymbol{e})=(\sum_i m_{(i)}\boldsymbol{\xi}_{(i)})\times g\boldsymbol{e}=0$ となるからである．ただし，$\boldsymbol{e}$ は一様な重力の方向を表す単位ベクトル．$\sum_i m_{(i)}\boldsymbol{\xi}_{(i)}=0$ は明らかだろう．

回転力がゼロということからただちに運動エネルギー T と角運動量 $\boldsymbol{L}$ の保存則が得られるが，慣性主軸を座標軸とする座標系 $\overline{\mathrm{G}}$ でそれらを書けば，

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha\bar{\omega}_\alpha{}^2=2T \tag{3.174a}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha{}^2\bar{\omega}_\alpha{}^2=\bar{L}^2 \tag{3.174b}$$

である．もちろん，$2T$ と $\bar{L}^2=\boldsymbol{L}^2$ が一定値をとるわけだ．この場合の基礎方程式はオイラーの方程式(3.170)において $\bar{T}_1=\bar{T}_2=\bar{T}_3=0$ とおいた式，

$$\Lambda_1\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_1}{\mathrm{d}t}=(\Lambda_2-\Lambda_3)\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3$$

$$\Lambda_2\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_2}{\mathrm{d}t}=(\Lambda_3-\Lambda_1)\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1 \tag{3.175}$$

$$\Lambda_3\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_3}{\mathrm{d}t}=(\Lambda_1-\Lambda_2)\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2$$

である．第1，2，3式にそれぞれ $\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$，$\bar{\omega}_3$，または $\bar{\omega}_1\Lambda_1$，$\bar{\omega}_2\Lambda_2$，$\bar{\omega}_3\Lambda_3$ を掛けて加えれば，式(3.174)が得られる．証明は簡単だ．

保存則(3.174)が存在するため，ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は $\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$，$\bar{\omega}_3$ を直角座標変数（原点は固定点）とする空間内で，式(3.174a)，(3.174b)が与える二つのだ円体の交線上を動くわけだ．この軌道を**ポールホード**という．二つのだ円体の交わり方のようすを調べよう．いま，慣性テンソルの主値に大小関係 $\Lambda_1\geqq\Lambda_2\geqq\Lambda_3>0$ があったとする．式(3.174a)に順次 Λ_1，Λ_2，Λ_3 を掛けて，式(3.174b)との引算をつくれば，

$$\Lambda_2(\Lambda_1-\Lambda_2)\bar{\omega}_2{}^2+\Lambda_3(\Lambda_1-\Lambda_3)\bar{\omega}_3{}^2=2T\Lambda_1-\bar{L}^2 \tag{3.176a}$$

$$\Lambda_3(\Lambda_2-\Lambda_3)\bar{\omega}_3{}^2-\Lambda_1(\Lambda_1-\Lambda_2)\bar{\omega}_1{}^2=2T\Lambda_2-\bar{L}^2 \tag{3.176b}$$

$$\Lambda_1(\Lambda_1-\Lambda_3)\bar{\omega}_1{}^2+\Lambda_2(\Lambda_2-\Lambda_3)\bar{\omega}_2{}^2=\bar{L}^2-2T\Lambda_3 \tag{3.176c}$$

が得られるが，$\Lambda_\alpha(\alpha=1,2,3)$ の大小関係のため，式(3.176a)は $\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3$ 平面でのだ円，式(3.176b)は $\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1$ 平面での双曲線，式(3.176c)は $\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2$ 平面でのだ円を表す．また，式(3.176a)，(3.176c)の左辺が正のため右辺も正であり，不等式，

$$2T\Lambda_1\geqq\bar{L}^2\geqq2T\Lambda_3 \tag{3.177}$$

が成立する．これはただちに不等式，

$$\sqrt{\frac{2T}{\Lambda_1}} \geqq \frac{\bar{L}}{\Lambda_1}, \qquad \frac{\bar{L}}{\Lambda_3} \geqq \sqrt{\frac{2T}{\Lambda_3}} \tag{3.178}$$

を与える．だ円体(3.174a)の主軸の長さは $2\sqrt{2T/\Lambda_\alpha}$，だ円体(3.174b)の主軸の長さは $2(\bar{L}/\Lambda_\alpha)$ に等しい（いずれも $\alpha=1, 2, 3$)．したがって，この不等式は第1軸方向ではだ円体(3.174a)の頭がだ円体(3.174b)の外に出るが，第3軸方向ではだ円体(3.174b)の頭がだ円体(3.174a)の外に出ることを意味している．第2軸方向については二つの場合があり，$2T\Lambda_2 > \bar{L}^2$（すなわち，$\sqrt{2T/\Lambda_2} > \bar{L}/\Lambda_2$）が成立するときは，第2軸方向でもだ円体(3.174a)の頭がだ円体(3.174b)の外に出て，ポールホードは第3軸を回る閉曲線になる．逆の場合，$2T\Lambda_2 < \bar{L}^2$ に対しては，だ円体(3.174b)の頭がだ円体(3.174a)の外に出て，ポールホードは第1軸を回る閉曲線となる．図3.8を見よ．等号の場合は第2軸を通る．

さて，慣性だ円体(3.174a)は剛体に固定されているので，その運動を見て剛体の回転を知ることもできる．図3.9を見

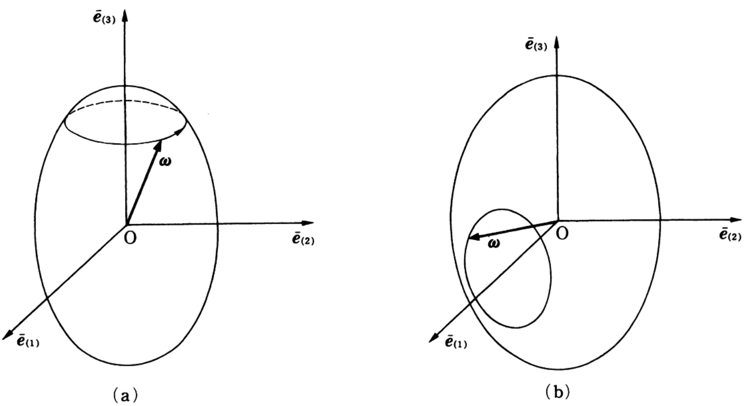


図3.8　ポールホード．(a) $2T\Lambda_2 > \bar{L}^2$，(b) $2T\Lambda_2 < \bar{L}^2$．

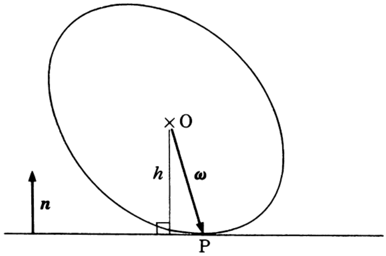


図 3.9　慣性だ円体の運動

ていただきたい．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ はこのだ円体の中心（固定点O）から表面の1点Pに至る距離ベクトルだから，距離OPが角速度の大きさ ω を与える．すなわち，

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \bar{\omega}_\alpha{}^2 = \omega^2 \tag{3.179}$$

一方，点P($\boldsymbol{\omega}=(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$) における慣性だ円体(3.174a)，すなわち，$F(\boldsymbol{\omega}) \equiv \sum_\alpha \Lambda_\alpha \bar{\omega}_\alpha{}^2 - 2T = 0$ の法線方向の単位ベクトルは，

$$n_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} (\partial F/\partial \bar{\omega}_\alpha)^2}} \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}_\alpha} = \frac{1}{\bar{L}} \bar{L}_\alpha \qquad (\text{ただし，} \bar{L}_\alpha = \Lambda_\alpha \bar{\omega}_\alpha) \tag{3.180}$$

だから，その点でこのだ円体に接する平面の方程式 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\omega})=0$ ($\boldsymbol{\xi}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ はこの平面上の流通座標) は，

$$\frac{1}{\bar{L}} \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda_\alpha \bar{\omega}_\alpha \xi_\alpha = \frac{2T}{\bar{L}} \tag{3.181}$$

と書くことができる．$h=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}=(2T/\bar{L})$ は固定点から接平面に降ろした垂線の長さである．角運動量 $\boldsymbol{L}$ は保存されるから，法線 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{L}/\bar{L})(\bar{L}_\alpha=\Lambda_\alpha\bar{\omega}_\alpha)$ をもつ接平面は動かない．すなわち，慣性だ円体はこの不動の平面に接しながら動き回るのである．なお，式(3.176)において，$2T\Lambda_1=\bar{L}^2$（または $2T\Lambda_3=$

$\overline{L}^2$) のときは$\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_3=0$（または$\bar{\omega}_1=\bar{\omega}_2=0$）となり，点 P は 1 番目（または 3 番目）主軸上に来て，OP は接平面に垂直となり動かない．$2T\Lambda_2=\overline{L}^2$ の場合も，回転軸を 2 番目主軸に一致させておく初期条件をとれば，やはり不動である．

角速度の時間的変動を求める方法の概略を説明しよう．式(3.175)に上から順に $(\bar{\omega}_1/\Lambda_1)$，$(\bar{\omega}_2/\Lambda_2)$，$(\bar{\omega}_3/\Lambda_3)$ を掛け加えれば，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\Lambda_2-\Lambda_3}{\Lambda_1}+\frac{\Lambda_3-\Lambda_1}{\Lambda_2}+\frac{\Lambda_1-\Lambda_2}{\Lambda_3}\right)\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 \qquad (3.182)$$

となる．一方，式(3.174a)，(3.174b)と式(3.179)を連立させて，$\bar{\omega}_1{}^2$，$\bar{\omega}_2{}^2$，$\bar{\omega}_3{}^2$ について解けば，次のように ω^2 の関数として表せる．

$$\bar{\omega}_1{}^2=\frac{\Lambda_2\Lambda_3}{(\Lambda_1-\Lambda_2)(\Lambda_1-\Lambda_3)}(\omega^2-A_1)\,;$$

$$A_1=\frac{2T(\Lambda_2+\Lambda_3)-\overline{L}^2}{\Lambda_2\Lambda_3}$$

$$\bar{\omega}_2{}^2=\frac{\Lambda_3\Lambda_1}{(\Lambda_2-\Lambda_3)(\Lambda_2-\Lambda_1)}(\omega^2-A_2)\,;$$

$$A_2=\frac{2T(\Lambda_3+\Lambda_1)-\overline{L}^2}{\Lambda_3\Lambda_1}$$

$$\bar{\omega}_3{}^2=\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{(\Lambda_3-\Lambda_1)(\Lambda_3-\Lambda_2)}(\omega^2-A_3)\,;$$

$$A_3=\frac{2T(\Lambda_1+\Lambda_2)-\overline{L}^2}{\Lambda_1\Lambda_2} \qquad (3.183)$$

大小関係 $\Lambda_1>\Lambda_2>\Lambda_3$ があれば，$(\omega^2-A_1)>0$，$(A_2-\omega^2)>0$，$(\omega^2-A_3)>0$ である．これを考慮し，式(3.183)を式(3.182)に代入して整理すれば，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{(\omega^2-A_1)(A_2-\omega^2)(\omega^2-A_3)} \qquad (3.184)$$

が得られる．これを積分すれば，ω^2 の時間的変動がわかるというわけだ．一般に，式(3.184)はだ円積分を与えるが，ここ

ではこれ以上立ち入らない．

ただ，剛体が $\bar{\mathrm{G}}$ の第3軸のまわりで対称である場合（3.4.2項最後の(ii)の場合）だけを取り上げて，回転のありさまを具体的に眺めよう．このとき，$\Lambda_1=\Lambda_2$ が成立し，式(3.175)第3式からただちに $\bar{\omega}_3=$一定がわかる．$\Omega=\bar{\omega}_3|\Lambda_1-\Lambda_3|/\Lambda_1$ とおいて，第2，3式を組み合せれば，$\bar{\omega}_1$ と $\bar{\omega}_2$ の方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\omega}_1}{\mathrm{d}t^2}+\Omega^2\bar{\omega}_1=0, \qquad \bar{\omega}_2=\pm\frac{1}{\Omega}\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_1}{\mathrm{d}t} \tag{3.185}$$

となり（±は $\Lambda_1>\Lambda_3$ および $\Lambda_1<\Lambda_3$ に対応する），その解は，

$$\bar{\omega}_1=a\cos(\Omega t+\gamma), \qquad \bar{\omega}_2=\mp a\sin(\Omega t+\gamma) \tag{3.186}$$

である．a と γ は定数，∓ は（3.185）の± に対応するものだ．したがって，角速度ベクトルの大きさは $\sqrt{\omega_3{}^2+a^2}$ であり，その先端は第3軸のまわりの半径 a の円周上を一定の角速度 Ω で回転する．$\Lambda_1>\Lambda_3$ ならば時計型，$\Lambda_1<\Lambda_3$ ならば反時計型の回転である．

地球は赤道方向に膨らんだ回転だ円体（赤道面に第1，2軸，それに垂直な方向に第3軸をとれば $\Lambda_1<\Lambda_3$）であり，Λ_1，Λ_3 の数値もかなり精密に求められている．それを使って，角速度ベクトルの回転周期 $T=(2\pi/\omega_3)(\Lambda_1/|\Lambda_1-\Lambda_3|)$を計算すれば，自転周期（$2\pi/\omega_3$）の約300倍（すなわち，300恒星日）であることがわかる(章末問題)．しかし，実際の極の変動はそれほど簡単ではない．この問題に関しては，地球を剛体とする近似があまりよくないのである．

c　対称コマの運動

一つの慣性主軸について対称な剛体を**対称コマ**という．その主軸を第3軸とすれば，もちろん，$\Lambda_1=\Lambda_2$ である．重心は対称軸上にあるとしよう．いま，一様な重力場中に対称コマをおき，対称軸上の1点を固定した場合の運動を考えよう．固定支点は滑らかであり，摩擦はないとする．この固定点を座標系Kと $\bar{\mathrm{G}}$ の共通原点に選び（図3.10），慣性主軸である $\bar{\mathrm{G}}$ の座標軸方向をオイラーの角 θ，ϕ，ψ で表す．ただし，空間固定

系 K の第 3 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{(3)}$ は鉛直線上方をさすようにとった．ψ の変動はコマの自転（すなわち，対称軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_{(3)}$ のまわりの回転）を表し，ϕ の変動はコマの回転軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_{(3)}$ が鉛直軸 $\boldsymbol{e}_{(3)}$ のまわりで行う**歳差運動**を表し，θ の変動はその回転軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_{(3)}$ の上下方向の運動である**章動**を表すものだ．

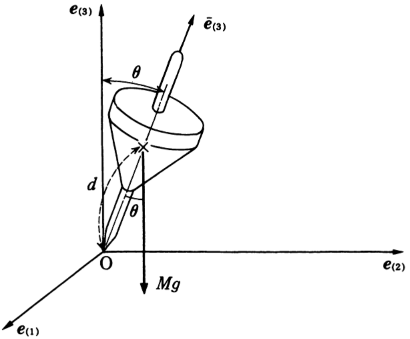


図 3.10　対称コマの運動

まず，この運動のラグランジアン $L=T-V$ を与えよう．座標原点と重心との距離を d とすれば，明らかに $V=Mgd\cos\theta$ である．一方，$\overline{\mathrm{G}}$ で書いた運動エネルギーの式(3.164)($T=(1/2)\bar{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{I}\bar{\omega}$) において，$\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$，$\bar{\omega}_3$ は式(3.144)の ω_1'，ω_2'，ω_3' であるから，$\Lambda_1=\Lambda_2$ と $\bar{\omega}_1{}^2+\bar{\omega}_2{}^2=\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta$ を考慮すれば，ラグランジアンは，

$$L=\frac{1}{2}\Lambda_1(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\Lambda_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2-Mgd\cos\theta \quad (3.187)$$

と書くことができる．保存力場の運動だから，エネルギー保存則($T+V=E$)，

$$E=\frac{1}{2}[\Lambda_1(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\Lambda_3\bar{\omega}_3{}^2]+Mgd\cos\theta \qquad (3.188)$$

が成立する．E はエネルギーの値を表す定数．なお，式(3.144)第 3 式 $\bar{\omega}_3=\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta$ を用いた．

ハミルトン形式に移るため，オイラー角の正準運動量，

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=\Lambda_1\dot\theta,\qquad p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=\Lambda_3(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta)$$

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}=\Lambda_1\dot\phi\sin^2\theta+\Lambda_3(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta)$$
$$=\Lambda_1(\dot\psi\sin^2\theta+p_\psi\cos\theta) \tag{3.189a}$$

を導入し，ルジャンドル変換，

$$\dot\theta=\frac{p_\theta}{\Lambda_1},\qquad \dot\psi+\dot\phi\cos\theta=\frac{p_\psi}{\Lambda_3},\qquad \dot\phi=\frac{p_\phi-p_\psi\cos\theta}{\Lambda_1\sin^2\theta} \tag{3.189b}$$

を使って時間微分を正準運動量で書き直せば，ハミルトニアンは，

$$H=\frac{1}{2\Lambda_1}{p_\theta}^2+U(\theta)\,; \tag{3.190a}$$

$$U(\theta)=\frac{1}{2\Lambda_3}{p_\psi}^2+\frac{(p_\phi-p_\psi\cos\theta)^2}{2\Lambda_1\sin^2\theta}+Mgd\cos\theta \tag{3.190b}$$

となる．ϕ と ψ は明らかに循環座標だから，その正準運動量 p_ϕ と p_ψ は保存量となり，定数とおいてよい（$p_\phi=L_3$，$p_\psi=\bar{L}_3$ であることはいうまでもない）．したがって，一つの独立変数 θ についての1次元問題を解けばよいことになった．

このような1次元問題は1.3節の方法で解くことができる．すなわち，エネルギー保存則 $H=E$（または式(3.188)）によって，

$$\dot\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{\Lambda_1}(E-U(\theta))} \tag{3.191}$$

が成立し，これを積分すればよい．しかし，この積分はかなり面倒である．ここでは，その問題に正面から取り組むことはせず，平衡点付近の小振動を定性的に議論するだけで満足しておく．

ポテンシャル $U(\theta)$ の平衡点は $\partial U/\partial\theta=\sin\theta[p_\psi\dot\phi-\Lambda_1\dot\phi^2\cos\theta-Mgd]=0$，すなわち，

$$\Lambda_1\dot{\phi}^2\cos\theta - p_\psi\dot{\phi} + Mgd = 0$$

または　$\dot{\phi}[\Lambda_3\dot{\psi} + (\Lambda_3 - \Lambda_1)\dot{\phi}\cos\theta] = Mgd$　　(3.192)

を満足する傾きの角度 θ_0 である．ただし，$\dot{\phi}$ は式(3.189b)第3式により θ に依存している．しかし，何らかの条件で θ_0, $p_\psi = \overline{L}_3$ が与えられていれば，式(3.192)第1式は歳差運動の角速度 $\dot{\phi}$ を決める2次方程式になる．これが実根をもたなければ意味ないが，その条件は $\overline{L}_3$ に対する不等式 $\overline{L}_3{}^2 \geqq 4\Lambda_1 Mgd\cos\theta_0$ である．

まず，エネルギーの値がちょうど $E_0 = U(\theta_0)$ である場合を考えよう．このときは式(3.191)により傾きの角の時間微分はゼロになり，コマの回転軸は座標系Kの第3軸と一定の角度 θ_0 を保って純粋な歳差運動を行う．もちろん，$\overline{L}_3$ は十分大きくなければならないが，極端な場合を想定し，$|\dot{\psi}| \gg |\dot{\phi}|$ であるとしよう．この場合，式(3.192)第2式のかっこ内第2項は無視することができ，また $\Lambda_3\dot{\psi} \simeq \overline{L}$ と近似してよい．ゆえに，式(3.192)第2式から歳差運動の角速度 $\dot{\phi} \simeq (Mgd/\overline{L})$ が得られる．$\overline{L}$ が大きいので，この場合の歳差運動は遅い角速度をもって行われる．

次に，エネルギーの値が E_0 よりわずか大きいとき，つまり，$E = E_0 + \varepsilon$ において ε が小さな正数の場合は，$U(\theta)$ を θ_0 のまわりで展開し，2次の項 $(\theta - \theta_0)^2$ までを残して，高次項を無視することができる．すなわち $U(\theta) \simeq U(\theta_0) + (1/2)\kappa(\theta - \theta_0)^2$ とできる．ここで

$$\kappa \equiv \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} = \frac{p_\psi{}^2}{\Lambda_1} + \Lambda_1\dot{\phi}^2(1 - \cos^2\theta_0) - 4Mgd\cos\theta_0 \tag{3.193}$$

とおいた．$\overline{L}_3$ が十分大きく，$p_\psi{}^2 = \overline{L}_3{}^2 \geqq 4\Lambda_1 Mgd\cos\theta_0$ が成立する場合に限定していたので，κ は正である．このとき，$\zeta \equiv \theta - \theta_0$ とおけば，$E - U(\theta) \simeq \varepsilon - (1/2)\kappa\zeta^2$ から，

$$\dot{\zeta}=\pm\sqrt{\frac{2}{\Lambda_1}\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\varkappa\zeta^2\right)} \tag{3.194}$$

が得られる．式 (3.191) の特殊な場合であり，問題は平衡点付近の調和振動に帰着した．したがって，ζ は1次元調和振動子と同じように，角振動数 $\sqrt{\varkappa/\Lambda_1}$ をもって $(-\sqrt{2\varepsilon/\varkappa}, +\sqrt{2\varepsilon/\varkappa})$ の間をサイン・カーブを描いて振動する(式(1.44)参照)．θ にもどせば，同じ振動数で $(\theta_0-\sqrt{2\varepsilon/\varkappa}, \theta_0+\sqrt{2\varepsilon/\varkappa})$ の間を振動するわけだ．ただし，$\theta_0>\sqrt{2\varepsilon/\varkappa}$ の場合に限る．図3.11を見ていただきたい．これが章動である．コマの自転角速度がきわめて大きく($p_\varphi=\bar{L}_3$ がきわめて大きく)，式(3.193)の第2，3項が第1項に比べて無視できる場合は，$\varkappa\simeq(p_\varphi{}^2/\Lambda_1)$ としてよいので，章動の角速度は $\sqrt{\varkappa/\Lambda_1}\simeq(\bar{L}_3/\Lambda_1)$ となる．

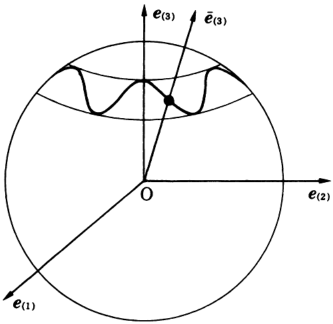


図3.11　章動

なお，エネルギーが値 $E_0=U(\theta_0)$ をとるとき，$\theta_0=0$ が実現する可能性もある．これはコマが垂直に立ったまま自転を続けるという**眠りコマ**の場合である．だが，実際は $\theta_0=0$ が正確に実現することはなく，そのまわりにごくわずかな変動が存在する．問題はこの運動が安定かどうかだ．そこで，初期条件 $\theta=0$，$\dot{\theta}=0$ を与え，対称コマが直立して運動を開始した場合のその後の運動を研究しよう．この初期条件のため，角運動量保存

則から $p_\phi = p_\psi = \Lambda_3\bar{\omega}_3$（一定），エネルギー保存則(3.188)から $E=(1/2)\Lambda_3\bar{\omega}_3{}^2+Mgd$ が得られるので，次式が成立する．

$$E-U(\theta)=2Mgd\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\left(\frac{\bar{\omega}_3}{\omega_0}\right)^2\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\right) \qquad (3.195)$$

ただし，$\omega_0{}^2=(4Mgd\Lambda_1/\Lambda_3{}^2)$．$\theta$ に対する運動可能条件は $E-U(\theta)\geqq 0$ である．(i) $\bar{\omega}_3>\omega_0$ の場合，この条件が成立するのは $\theta=0$（すなわち，$E-U(0)=0$）のときだけだ．したがって，$\theta=0$ は保たれて眠りコマが実現する．しかし，(ii) $\bar{\omega}_3<\omega_0$ の場合，$(\bar{\omega}_3/\omega_0)<\cos(\theta/2)$ の範囲内で運動可能条件を満たし，θ は0と α（ただし，$\cos\alpha=2(\bar{\omega}_3/\omega_0)^2-1$）の間で振動する．ゆえに，$\bar{\omega}_3>\omega_0$ が $\theta=0$ を保持する眠りコマの安定条件である．これは $p_\phi{}^2=\Lambda_3{}^2\bar{\omega}_3{}^2>4\Lambda_1Mgd$ だから，上記の場合の安定条件と共通するわけだ．初期条件が $\theta=0$，$\dot{\theta}=0$ からごくわずかずれている場合の安定問題も似た形で議論することができる．しかし，現実のコマの運動は摩擦があるため，最初(i)で出発しても $\bar{\omega}_3$ が減衰して(ii)にずれ込み，よろめき始める．

剛体の運動はかつて数理物理学の中心課題の一つであり，古来数多くの研究が行われてきた．詳しく紹介する余裕はこの本にはない．興味のある読者にはホイッテカーや山内の著書（巻末の参考文献）を読むことを勧める．

問　　題

3.1　自由度が2個の場合の規準振動を求めよ．ただし，$M_{jk}=m\delta_{jk}$，$V_{jk}=V_{jk}{}^{(0)}+V_{jk}{}^{(1)}$，$V_{jk}{}^{(0)}=m\omega_0{}^2\delta_{jk}$（以上，いずれも $j, k=1, 2$），および $V_{11}{}^{(1)}=V_{22}{}^{(1)}=0$，$V_{12}{}^{(1)}=V_{21}{}^{(1)}=mg$ とする．m，ω_0，g は正数．

3.2　図3.2の鎖モデルで $N=3$ としよう．すなわち，直線上に拘束さればねで結び付けられた3個の質点がある．この系の基準振動を求め，振動の状況を具体的に説明せよ．ただし，各質点は等しい質量をもち，ばねは等しい自然長とばね定数をもつと

する．また，両端は自由であり，外力はないものとせよ．

3.3 図3.12に示すように，一様な重力場中の鉛直面内に，滑らかな支点Oから質量の無視できる長さ l_1 の剛体棒でつり下げられている質量 m_1 の質点と，それに滑らかな関節によって連結されている（やはり質量の無視できる）長さ l_2 の剛体棒の末端に結び付けられている質量 m_2 の質点からなる力学系がある．これを2重振子という．このような2重振子の微小振動を研究せよ．ただし，重力の加速度を g とする．この場合，座標系を図のようにとり，各質点の座標変数を (x_1, y_1)，(x_2, y_2) とすれば，拘束条件は $x_1^2+y_1^2=l_1^2$，$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l_2^2$ である．各剛体棒が y 軸の負方向とつくる角 θ_1，θ_2 を一般座標に選べば便利だ．

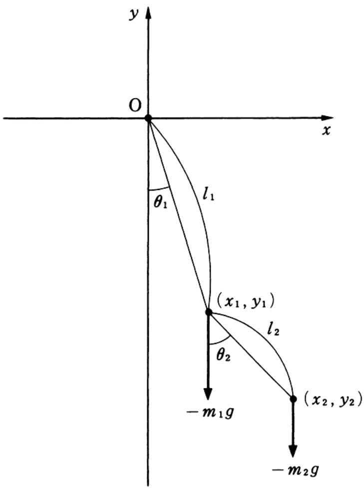


図3.12　2重振子

3.4 ラグランジアン(3.38)で記述される鎖モデルの基準振動を求めよ．ただし，両端は自由であり，外力はいっさい働いていないとする．問題3.2の一般化である．行列 (V_{jk}) をつくるとき端点 $j, k=1, N-1$ の扱いに注意しながら，固有値問題

(3.15)を解くことから始めなければならない．これは線形代数の応用問題だ．

3.5　ギターやピアノを想像しながら，両端固定の一様な弦の振動を具体的に調べよう．ここでは次のような特別な初期条件を与える．

(i)　$f(x)=(2A/L)[(L/2)-|x|]$，$F(x)=0$．

(ii)　$f(x)=(6A/L)[(L/2)+x](x<-(L/3))$，$f(x)=(6A/5L)[(L/2)-x](x>-(L/3))$，$F(x)=0$．

ただし，L は弦の長さ，A は初期変位の大きさでともに正数．$\theta(x)$ は $x>0$ のとき 1 となり，$x<0$ のとき 0 となる階段関数である．数値的には，$L=60$ cm，$A=0.6$ cm，$v=600$ m/s とおいて，フーリエ型級数解（3.79）の各モードに配分されるエネルギーの比を求めよ．どのモードが最も優勢であるかを見るためである．さらにその級数の最初の数項（例えば $n=2$ まで，$n=3$ まで，$n=4$ まで，‥‥）の和の時間・空間的変動を (ψ, x) グラフ上に t をパラメーターとして図示し，正確な解(3.38)と比較せよ．

3.6　問題という枠を越えて，デルタ関数について必要な知識を述べておこう．デルタ関数 $\delta(x)$ は $x\neq0$ でゼロ，$x=0$ を含む積分が $\int\delta(x)\mathrm{d}x=1$ となる特異関数であるが，本文でも述べたように，有限1価連続の任意階微分可能なたちのよい関数 $g(x)$ に対する積分(3.54)によって定義されたと考えるべきである．3 次元デルタ関数 $\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})$ は 3 次元空間の点 $\boldsymbol{a}$ を含む小領域(体積 $\Delta\Omega$)内で$(1/\Delta\Omega)$，外でゼロという関数の（$\Delta\Omega\to0$ に対する）極限として定義される．したがって，式(3.114)が点電荷の電荷・電流密度を表すのは当然だ．もちろん，次の積分公式が成立する．

$$\psi(\boldsymbol{a})=\int\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

積分は $\boldsymbol{a}$ を含む 3 次元領域で行われる．適当な修正を施せば，1 次元の場合の性質や公式はそのまま 3 次元に移行するので，これから 1 次元デルタ関数だけについて語る．デルタ関数の s

階導関数 $\delta^{(s)}(x)$ もよい関数 $g(x)$に対する積分式,

$$\int\delta^{(s)}(x'-x)\,g(x')\,\mathrm{d}x'=(-1)^s g^{(s)}(x)$$

によって定義される. $g^{(s)}(x)$ は $g(x)$ の s 階導関数である. $g^{(1)}(x)=g'(x)$ と書くこともある. デルタ関数とその微分に対する下記の諸公式を問題として提供しよう. いずれの等式も, よい関数を掛けて積分したときに成立するものである.

(a)　$\delta(x)=\theta'(x)$; $\theta(x)$ は階段関数,

(b)　$\delta(-x)=\delta(x)$, $x\delta(x)=0$, $\delta(ax)=(1/|a|)\delta(x)$ $(a\neq 0)$, $\delta(x^2-a^2)=(1/2|a|)\{\delta(x+a)+\delta(x-a)\}$ $(a\neq 0)$,

(c)　$\delta'(-x)=-\delta'(x)$, $x\delta'(x)=-\delta(x)$.

なお, デルタ関数 $\delta(x)$ のフーリエ変換を式(3.95b)によって求めれば, 積分表示,

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\mathrm{d}k$$

が得られる. 右辺の積分はこのままでは収束せず無意味だ. 収束因子 $\exp(-a^2k^2/2)$, $\exp(-\varepsilon|k|)$, $\theta(k+\lambda)\theta(\lambda-k)$ を導入すれば (a, ε, λ は正数), 近似,

$$\delta_a(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

$$\delta_\varepsilon(x)=\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}$$

$$\delta_\lambda(x)=\frac{\sin\lambda x}{\pi x}$$

が得られる. いずれも, $a\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $\lambda\to\infty$ でデルタ関数に接近する. 読者自ら確かめるとよい.

3.7　$x=a$ を除いて微分可能な関数 $g(x)$ が不連続点 $x=a$ で $G\equiv g(a+0)-g(a-0)$ だけジャンプするとすれば, 次式が成立することを証明せよ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=[g'(x)]+G\,\delta(x-a)$$

$[g'(x)]$ は $x\neq a$ における導関数である. これは前問(a)の応用問

題だ．

3.8　汎関数と汎関数微分について次の問に答えよ．

(a)　汎関数のテイラー展開が次式で与えられることを示せ．

$$u[f+g]=u[f]+\int\frac{\delta u[f]}{\delta f(x)}g(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2!}\iint\frac{\delta^2 u[f]}{\delta f(x)\delta f(x')}g(x)g(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'+\cdots\cdot$$

汎関数微分の定義のために用意した ε の関数 $F[\varepsilon]\equiv u[f+\varepsilon g]$ を ε についてテイラー展開し，定義式(3.51)を使えばよい．

(b)　汎関数 $u[f]$ は関数 $f(x)$ の汎関数であると同時に $f(x)$ のフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ $(=(1/\sqrt{2\pi})\int e^{-ikx}f(x)\mathrm{d}x$：式(3.95)を見よ)の汎関数でもある．$\delta u[f]/\delta\tilde{f}(k)$ が $\delta u[f]/\delta f(x)$ のフーリエ変換に等しいことを証明せよ．

(c)　作用積分 $I[q]\equiv\int_a^b L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t$ は一般座標 $q(t)$ の汎関数である．端点における値 $q(a)$ と $q(b)$ を固定して $q(t)$ による汎関数微分を実行し，

$$\frac{\delta I[q]}{\delta q_k(t)}=\frac{\partial L}{\partial q_k(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k(t)}$$

となることを示せ．これをゼロとおいたものがラグランジュの方程式であった．4章で議論する変分原理はこれとまったく同内容の話である．

3.9　周期 L をもつ次の関数のフーリエ級数を求めよ．

(a)　$f(x)=2Ax/L\ (-L/2\leqq x\leqq L/2)$．

(b)　$A\{\theta(x+a/2)-\theta(x-a/2)\}\ (-L/2\leqq x\leqq L/2)$．ただし L，A，a は正数 $(a<L)$，$\theta(x)$ は階段関数である．

(c)　この場合も，例えば $L=10$ cm，$A=5$ cm，$a=3$ cm として，級数(3.93)の最初の数項で近似したグラフを描き，元の関数と比較せよ．

3.10　演算子 L が与えられたとき，関数内積(3.73)の意味で $(u, Lv)=(L^\dagger u, v)$ が成立する場合，$L^\dagger$ を L の共役演算子という．

特に $L=L^\dagger$ の場合，L を自己共役演算子とよぶ．次の問に答えよ．

(a) 微分演算子 $D\equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ に対しては $D^\dagger=-D$ であることを示せ．ただし，被作用関数 u，v は領域（$-L/2\leqq x\leqq L/2$）の端点で $[uv]_{L/2}=[uv]_{-L/2}$ を満足するものとしよう．

(b) $L\equiv \mathrm{D}^2$ に対しては $L^\dagger=L$ であることを示せ．ただし，$[uv'-u'v]_{L/2}=[uv'-u'v]_{-L/2}$ であるとする．

(c) L が自己共役演算子の場合，固有値問題 $Lu_n=\lambda_n u_n$ の固有値 λ_n が実数であることを証明せよ．$L=L^\dagger$ のため $(u_n, Lu_n)^*=(Lu_n, u_n)=(u_n, Lu_n)$ となることを使えばよい．

(d) 異なる固有値（$\lambda_n\neq\lambda_{n'}$）に属する固有関数 u_n と $u_{n'}$ は関数内積の意味で直交することを証明せよ．$(u_n, u_{n'})=0$．u_n の固有値方程式に左から $u_{n'}$ を掛けて関数内積をつくり，$u_{n'}$ の固有値方程式の複素共役に右から u_n を掛けてつくった関数内積と引算して $(\lambda_n-\lambda_{n'})(u_n, u_{n'})=0$ を導けばよい．

3.11 弱い一様な静磁場 $\boldsymbol{B}(\phi=0,\ \boldsymbol{A}=(1/2)\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}:\boldsymbol{B}=$一定) 中の荷電粒子（電荷 e，質量 m）のハミルトニアンは $H=(1/2m)\boldsymbol{p}^2+V-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{A}$ となることを示せ．ただし，B の 2 乗の項を無視し，$\boldsymbol{\mu}=(e/2mc)\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ とおいた．式(3.123)を参考にせよ．

3.12 1.4.2 項では，時空座標 $x_\mu=(x_1, x_2, x_3, ict)$ が 4 次元ユークリッド空間のベクトル(4 元ベクトル)となり，ローレンツ変換(1.64)に従うことを見た．4 元ベクトル微分 $\partial/\partial x_\mu$ も同じ変換に従う．ローレンツ変換は式(1.65)および式(1.61)を不変に保つ変換だ．この知識を基にして電荷保存則(3.99)とローレンツ条件(3.103)を眺め，$J_\mu=(J_1, J_2, J_3, ic\rho)$ と $A_\mu=(A_1, A_2, A_3, i\phi)$ が 4 元ベクトルとして変換することを証明せよ．4 元ベクトル J_μ と A_μ を使えば，電磁場の基礎方程式(3.104)は $\Box A_\mu=-(4\pi/c)J_\mu$ となる．ローレンツ変換に対する形不変性はいまや自明だ．1.4.2 項の議論を思い出していただきたい．

3.13 電磁場（$\phi, \boldsymbol{A}$）中にある質量 m，電荷 e の荷電粒子の相対論

的運動に対するラグランジアンは $L=-mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}^2/c^2}-e\phi(\boldsymbol{r},t)+(e/c)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ で与えられる．次の問に答えよ．

(a)　ラグランジュの方程式を求めよ．

(b)　正準運動量とハミルトニアンを導け．

(c)　ハミルトンの正準方程式がラグランジュの方程式を再現することを示せ．

(d)　作用積分 $I=\int L\mathrm{d}t$ のローレンツ変換に対する不変性を議論せよ．

3.14　単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ が指定する固定軸のまわりの慣性モーメント I は式(3.171)で与えられているが，主慣性モーメント Λ_1, Λ_2, Λ_3 と座標系 $\overline{\mathrm{G}}$ で見た $\boldsymbol{n}$ の成分 $n_k(k=1,2,3)$ によって，$I=\sum_k n_k{}^2\Lambda_k$ と書くことができることを示せ．

3.15　式(3.171)において $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_{(1)}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_{(2)}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_{(3)}$ とおいたものをそれぞれ I_x, I_y, I_z としよう．

(a)　(x,y) 平面上に分布している質点系に対しては，$I_z=I_x+I_y=\sum_i m_{(i)}(x_{(i)}{}^2+y_{(i)}{}^2)$ となることを示せ．

(b)　z 軸上に分布している質点系に対しては，$I_x=I_y=\sum_i m_{(i)}z_{(i)}{}^2$, $I_z=0$ となることを示せ．

3.16　次の場合の慣性モーメントを導け．

(a)　質量 m_a, m_b の質点が質量を無視できる長さ l の剛体棒で連結されている場合，重心を通り剛体棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメント：$I=\mu l^2$（μ は換算質量）．

(b)　一様な質量密度をもつ半径 a の球の場合，中心を通る軸のまわりの慣性モーメント：$I=(2/5)Ma^2$（M は全質量）．

(c)　一様な質量密度をもつ半径 a, 厚さ d の円盤の場合，中心を通り，円盤面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント：$I=(1/2)Ma^2$（M は全質量）．

(d)　一様な質量密度をもつ直方体（辺の長さ a,b,c）の場合，対角線のまわり慣性モーメント：$I=(M/6)\ (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)/(a^2+b^2+c^2)$（$M$は全質量）．なお，主値は $\Lambda_a=(M/12)$

(b^2+c^2)，$\Lambda_b=(M/12)(c^2+a^2)$，$\Lambda_c=(M/12)(a^2+b^2)$ である．

3.17 慣用記号として，$A=\Lambda_1$，$B=\Lambda_2$，$C=\Lambda_3$ を使うことが多い．「理科年表」（丸善，1997 年）によれば，地球の主慣性モーメントは，$A/(Ma_0{}^2)=0.329587\pm0.000002$，$B/(Ma_0{}^2)=0.329594\pm0.000002$，$C/(Ma_0{}^2)=0.330673\pm0.000002$ である（M は地球の質量，a_0 は赤道半径）．$A=B$ とする近似で自由回転剛体としての地球の角速度ベクトルの回転周期を求めよ．

3.18 自由回転剛体の場合，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$（図 3.9 の OP）の回転は空間に固定した円すいと，剛体に固定した別の円すいをつくる．どのような円すいができるか，そして，どのような運動が起るかを説明せよ．

4　変 分 原 理

これまで，ニュートンの立場からラグランジュの立場へ，ラグランジュの立場からハミルトンの立場へと形式を変えて力学の理論体系を整備してきた．見掛けや形は違っていても，それぞれの基礎的な運動方程式であるニュートンの方程式，ラグランジュの方程式，ハミルトンの正準方程式は時間についての常微分方程式であった．力学の法則を常微分方程式によって表してきたわけだ．微分型の法則といってよい．この型の運動法則はある時刻の力学変数の値を与えて次の瞬間の力学変数の値を決めるという形をとる．運動全体を知るには，このような微小時間内の初期値問題を次々に積み上げて行かなければならない．これに対して，1.3 節で説明したような保存則から運動全体を見るという方法もあったが，これはいわば積分型の法則である．この 4 章では，まったく違った記述形式である**変分原理**をお見せしよう．変分原理は物理学理論体系の手本ともいうべきものであって，狭い意味での力学ばかりでなく，電磁気学，量子力学，場の量子論，一般相対性理論などの定式化に際して広く用いられている．

4.1　変分原理と運動方程式

自由度 n の質点系において，時刻 t_1 で一般座標 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ が値 $q^{(1)}=(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \cdots, q_n^{(1)})$ をとり，後の時刻 t_2 $(>t_1)$ で値 $q_1^{(2)}=(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \cdots, q_n^{(2)})$ をとることを指定して，この中間の時刻で $q(t)$ がどのように変化するかという問題を考える．質点の数が N であれば，拘束条件のない場合 $n=3N$，K 個の拘束条件があれば $n=3N-K$ である．しばらくの間，拘束条件がないとして話を進める．拘束条件問題はすでに詳しく議論したので，その場合への拡張は容易である．後で補足したい．また，記法を簡単にするために，q を 1 次元変数のように扱い，空間 (q, t) を便宜上平面のように表そう（図 4.1)．概念的にはそれで十分だ．その“平面”上で，固定点 A $(q^{(1)}, t_1)$ と B $(q^{(2)}, t_2)$ を結ぶどのような経路が実現するかを問題にするのである．もちろん，運動法則に従う経路はただ一つしかない．ここでは，図形的に可能な数多くの経路の中から運動法則に従うただ一つの経路を選び出す方法を定式化しようというのだ．これは初期値問題ではない．ラグランジュの立場の初期値問題では，$t=t_1$ において初期値 $(q^{(0)}, \dot{q}^{(0)})$ を与えれば運動の経路は完全に決る．この節では，そのような初期条件の

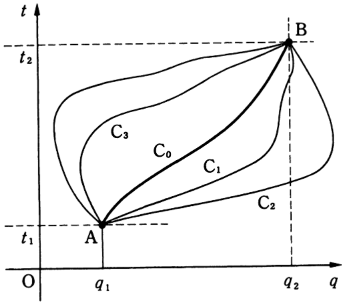


図 4.1　運動の経路

代りに固定点 A および B を初終期条件として与えるわけだ．運動の経路はこの条件下でも一義的に決定される．いずれも，ラグランジュの方程式が 2 階の常微分方程式である場合の特徴である．

とうぶんの間，ラグランジュの立場をとり，ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$によって記述される力学系を取り扱う．まず，A と B を結ぶ経路をいくつか考え，番号 s を付けて C_s と書く．いずれも，運動の経路の候補者だから，時間に逆行するようなものはとらない．経路を一つ選ぶと，例えば，C_s を選ぶと，一般座標 q の時間的変化が確定する．この関数形を $q=q(t, C_s)$ と書こう．これをラグランジアンに入れて，時間変数 t について t_1 から t_2 まで積分する．すなわち，

$$I[C_s]=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t, C_s), \dot{q}(t, C_s), t)\,dt \tag{4.1a}$$

をつくる．これを**作用**または**作用積分**という．経路 C_s を与えれば，q と $\dot{q}$ が t の関数として確定し，その関数であるラグランジアン L も t の関数として定まるので，積分 $I[C_s]$ の値が決る．経路を変更すれば，q と $\dot{q}$ の t 依存も変り，結果として積分 I の値も変る．すなわち，$I[C]$ は経路 C の関数である．これは $q(t)$ の関数形の関数と見ることもできるので，$I[q(t)]$ とも書く．$I[C]$ を C または $q(t)$ の**汎関数**という．汎関数については，すでに 3.2 節で説明した．なお，I は経路 C の汎関数であるばかりでなく，固定点 A と B の関数でもある．これを強調して $I(B;A)$ または $I(q^{(2)}, t_2; q^{(1)}, t_1)$ と書くことがある．すなわち，

$$I(q^{(2)}, t_2; q^{(1)}, t_2)=\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{4.1b}$$

と書く．後のために覚えておいてほしい．

さて，$I[C]$の値の C による変動の1例として，図4.2 のような場合を取り上げよう．これは $I[C]$ が経路 C_0 で極小値をとる場合である．経路 C_0 上の一般座標の時間的変化を $q^{(0)}(t)$

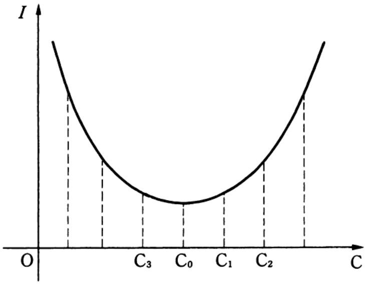


図 4.2　作用積分の経路依存性

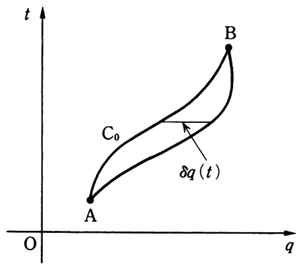


図 4.3　固定端をもつ経路の変分

$=(q_1^{(0)}(t), q_2^{(0)}(t), \cdots\cdot, q_n^{(0)}(t))$ としよう．C_0 のごく近くに別の経路 C をとり，その上の一般座標を $q(t)$ とすれば，

$$q_k(t)=q_k^{(0)}(t)+\delta q_k(t) \qquad (k=1, 2, \cdots\cdot, n) \tag{4.2}$$

と書くことができる．$\delta q_k(t)$ は十分小さな値をとる関数である．$\delta q_k(t)$ を経路の微小変更 $C_0 \to C$ による $q(t)$ の**変分**という．ただし，C_0 も C も固定点 A，B を通るので，変分 $\delta q_k(t)$ は境界条件，

$$\delta q_k(t)=\delta q_k(t_2)=0 \qquad (k=1, 2, \cdots\cdot, n) \tag{4.3}$$

を満足しなければならない（図 4.3 参照）．$I[C_0]$ が極小値をとる条件は，

$$\delta I[C_0] \equiv I[C]-I[C_0]=O((\delta q)^2) \tag{4.4}$$

すなわち，$\delta q_k(t) \to 0$ に対して第 1 変分がゼロとなることである．

$$\delta I[C_0]=0 \tag{4.5}$$

一般に，$\delta q_k(t)=\varepsilon f_k(t)$ とおいて（ε は微小量，$f_k(t)$ は t の有限1価連続関数）ε の関数 $F(\varepsilon) \equiv I[C]$ をつくり，ε についてテイラー展開すれば，$F(\varepsilon)=F(0)+\varepsilon F'(0)+(1/2)\varepsilon^2 F''(0)+\cdots\cdot$ であるが，ε の1次，2次，$\cdots\cdot$の項をそれぞれ I の C_0 における第1変分，第2変分，$\cdots\cdot$ という．すなわち，$F(0)=$

$I[\mathrm{C}_0]$, $\varepsilon F'(0)=\delta I[\mathrm{C}_0]$, $(1/2)\varepsilon^2F''(0)=\delta^2 I[\mathrm{C}_0]$, $\cdots$ である．極小条件は明らかに式(4.5)と $\delta^2 I[\mathrm{C}_0]>0$ が成立することであるが，常にこの条件が成り立つとは限らない．L の関数形，I の汎関数形によっては，$\delta^2 I[\mathrm{C}_0]<0$ も可能である．この場合，I は C_0 で極大値をとる．$\delta^2 I[\mathrm{C}_0]=0$ もありうるが，これは C_0 が I の反曲点を与える場合だ．式(4.5)を満足するこれらの点を一般に I の停留点という．汎関数の極値問題であるが，本質的な事情は点関数の場合と同様である．

さて，停留点条件(4.5)を満足する経路 C_0 を求めよう．式(4.2)を式(4.1)に代入し，$\delta q_k(t)$ の2次以上の項を無視すれば，

$$I[\mathrm{C}]=I[\mathrm{C}_0]+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta q_k+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta\dot{q}_k\right\}\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

となる．経路変更による変分 δq_k と運動による変化分 $\mathrm{d}q_k$ とは独立だから，

$$\delta\dot{q}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_k \tag{4.7}$$

としてよい．式(4.7)を式(4.6)に入れて部分積分を実行すれば，右辺最後の項は，

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta\dot{q}_k\mathrm{d}t=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta q_k\mathrm{d}t$$

となり，式(4.6)から I の第1変分の式，

$$\delta I[\mathrm{C}_0]=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta q_k\,\mathrm{d}t \tag{4.8}$$

が得られるが，固定点条件(4.3)のため右辺第1項は消えて，

$$\delta I[\mathrm{C}_0]=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)_{q=q^{(0)}}\delta q_k\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

となる．拘束条件がない場合を想定しているので，δq_k はすべて独立である．したがって，停留条件(4.5)が成立するためには，C_0 上の関数 $q^{(0)}(t)$ は微分方程式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{4.10}$$

に従わなければならない．これはラグランジュの方程式だ．ゆえに，積分 I を極小（一般的には停留的）にする経路は運動方程式を満足するものであることがわかった．逆に，運動方程式に従って動く経路は作用積分 I の値を極小（一般的には停留的）にする．こうして，作用積分 I の極値問題が運動方程式を解くことに等価であることが証明された．この意味で式(4.5) は運動を支配する基礎的な原理であり，**変分原理**または**ハミルトンの原理**とよばれている．なお，式(4.5)は $\delta I[q(t)]/\delta q(t)=0$ と等価である．汎関数微分の定義(3.51)と3章問題を参考にするとよい．

2章で見たように，単純な保存系の場合（$L=T-V$），電磁的なローレンツ力(3.115)のように式(2.36)と書ける場合（$L=T-V-U$ または式(3.120)），ホロノーム型の拘束条件がある場合（拘束力ポテンシャル$-\sum_a \lambda_s \mathrm{G}_a$ を含む L），力学系はラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ で記述されるので，上記の議論はそのまま適用できる．ラグランジアンの形で表せない非保存力や非ホロノーム型拘束力 Q_k がある場合は，変分原理(4.5)は，

$$\delta I[\mathrm{C}_0]+\delta W=0; \qquad \delta W\equiv\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta q_k \tag{4.11}$$

のように拡張できる．ただし，δW は力 Q_k が仮想変位 δq_k に際して行う仮想仕事である．変分原理としての式(4.11)が運動法則，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k \qquad (k=1,2,\cdots\cdot,n) \tag{4.12}$$

を与えることはすぐわかる．拘束条件のある場合，L または δW はラグランジュの未定乗数 $\lambda_a(a=1,2,\cdots\cdot,K)$ を含むが，変分は λ_a についてもとらなければならない．その変分から拘束条件が得られる．

ハミルトンの立場に移ろう．力学変数は q と p であり，経路は (q,p,t) 空間の曲線になる．固定点は $A=(q^{(1)},p^{(1)},t_1)$ および $B=(q^{(2)},p^{(2)},t_2)$ であるが，q と p の4組の値を独立に与えることはできない．q と p は1階の常微分方程式であるハミルトンの正準方程式に従うはずだから，初終期条件で独立に指定できるのは2組だけである．ここでは，従来通り $q^{(1)}$ と $q^{(2)}$ を与えて話を進める．この場合，時刻 t_1，t_2 における運動量 $p^{(1)}$，$p^{(2)}$ は独立ではなく，$q^{(1)}$，$q^{(2)}$ の関数として定まるはずのものだ．逆に，$p^{(1)}$，$p^{(2)}$ を与えて出発してもよいが，今度は $q^{(1)}$，$q^{(2)}$ が $p^{(1)}$，$p^{(2)}$ の関数になる．この問題については，後で何回か議論することになろう．

さて，変分原理は (q,p,t) 空間内で固定点 A，B を結ぶ運動経路 C_0 を作用積分の極値問題として与えるわけだが，ハミルトンの立場でも原理の形(4.5)は変らない．ラグランジュの立場と違うのは変数のとり方だけであり，L の式としては，

$$L=\sum_{k=1}^{n}p_k\dot{q}_k-H(q,p,t) \tag{4.13}$$

を使う．A と B を結ぶ空間 (q,p,t) 上の経路 C を与えれば，q と p の関数形 $q(t,C)$，$p(t,C)$ が確定し，作用積分の式，

$$I[C]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{k=1}^{n}p_k\dot{q}_k-H(q,p,t)\right\}\mathrm{d}t \tag{4.14}$$

の値が決る．この場合も，I は経路 C の汎関数となる．変分原理は経路変更についての極値問題を解くことを要求するが，大筋はラグランジュの立場の場合と同様である．すなわち，微小変更 $C_0\to C$ に対応する変分，

$$q_k(t)=q_k^{(0)}(t)+\delta q_k(t), \qquad p_k(t)=p_k^{(0)}(t)+\delta p_k(t); \tag{4.15a}$$

$$\delta q_k(t_1)=\delta q_k(t_2)=0, \qquad \delta p_k(t_1)=\delta p_k(t_2)=0 \tag{4.15b}$$

に対して I の第1変分を計算し，それをゼロとおけばよい．まず，

$$\delta I[\mathrm{C}_0]=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left(p_k\delta\dot{q}_k+\dot{q}_k\delta p_k-\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)_0\mathrm{d}t \tag{4.16}$$

であるが，右辺第1項に対して式(4.7)を使って部分積分を実行すれば，式(4.15b)のおかげで，

$$\delta I[\mathrm{C}_0]=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k-\left(\dot{p}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right\}_0\mathrm{d}t \tag{4.17}$$

が得られる．ただし，$\{\cdots\cdot\}_0$ の添字 0 は (q,p) が C_0 上の値をとることを示す．したがって，前と同様の論法でいえば，極値問題 $\delta I[\mathrm{C}_0]=0$ の解である C_0 上の力学変数の時間的変動 $q=q^{(0)}(t)$，$p=p^{(0)}(t)$ は微分方程式，

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k=1,2,\cdots\cdot,n) \tag{4.18}$$

を満足しなければならない．これはハミルトンの正準方程式だ．逆にハミルトンの正準方程式に従う力学変数は I の極値を与える．なお，ラグランジアンに取り込めない一般力 $Q_k'=Q_k+\sum_a\lambda_a A_{a,k}$ がある場合，変分原理(4.11)からは式(4.18)第2式の右辺に Q_k' を加えた式が出てくる．式(2.51c)と同形の方程式だ．

いま見たように，変分原理はラグランジュの立場でもハミルトンの立場でもまったく同じ顔(4.5)(または式(4.11)) をしている．同じ顔の変分原理(4.5)(または式(4.11)) は変数を選ぶそれぞれの立場に応じて，ラグランジュの方程式やハミルトンの正準方程式を導出してくれるわけだ．この意味で変分原理は微分方程式形の運動法則よりもっと根元的な力学原理だということができ，統一的な理論体系を求める理論物理学の志向に合っている．実際，場の理論など現代物理学の多くの分野で，変分原理は理論体系の中核として活躍している．

2.3節の問題を変分原理の立場から見直そう．2.3.1節では，ラグランジアン L を式(2.93)によって新しいラグランジアン $L'=L+(\mathrm{d}X/\mathrm{d}t)$ に取り替えても，運動方程式は変らないということを証明した（X は一般座標 q と t の関数である）．L と L' による作用積分をそれぞれ I および I' と書けば，明らかに，

$$I'=\int_{t_1}^{t_2} L'\mathrm{d}t=I+X(q^{(2)}, t_2)-X(q^{(1)}, t_1) \tag{4.19}$$

である．AとBを固定点として両辺の変分をとれば，式(4.3)のため $\delta X(q^{(2)}, t_2)=\delta X(q^{(1)}, t_1)=0$ となり，ただちに $\delta I'=\delta I$ が得られる．すなわち，関数 X は作用積分の変分には何の影響も与えない．ゆえに，運動方程式は変らない．2.3.1項では偏微分演算を実行して L と L' の与えるラグランジュの方程式を比較したが，それよりはるかに見通しもよく簡単である．

2.3.2項の問題を考えよう．ラグランジアンが $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ のように，$\dot{q}$ 以上の高階時間微分 $\ddot{q}$ などを含む場合の取扱いである．簡単のため，高階微分は $\ddot{q}$ までとするが，一般の場合に拡張することは容易だ．2.3.2項では，これを拘束条件問題として処理した．この節の変分原理(4.5)は作用積分の極値問題として固定点間の運動の経路を与えるわけだが，作用積分の定義式(4.1)自身は高階時間微分があっても変更しなければならない理由はない．そこで，極値問題，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)\mathrm{d}t=0 \tag{4.20}$$

を設定して，これに等価な運動方程式を求めてみよう．しかし，$\ddot{q}$ があるため，運動経路の空間は (q, t) ではなく $(q, \dot{q}, t)$ であり，固定点Aの座標は $(q^{(1)}, \dot{q}^{(1)}, t_1)$，Bの座標は $(q^{(2)}, \dot{q}^{(2)}, t_2)$ である．したがって，固定点条件(4.3)には $\delta\dot{q}_k(t_1)=\delta\dot{q}_k(t_2)=0$ を加えておかなければならない．$\ddot{q}$ の存在のため，式(4.3)だけでは運動経路を一義的に決める初終

期条件とはならないからである．式(4.7)にはもう一つ $\delta\ddot{q}_k=(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2)\delta q_k$ を加えておく必要がある．第1変分を計算すれば，

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}\delta\ddot{q}_k\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}\right)\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}\right\}\delta q_k\,\mathrm{d}t \quad (4.21)$$

となるが，固定点条件により右辺の第1列はゼロであり，微分方程式，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \quad (4.22)$$

が得られる．これは式(2.103)にほかならない．この場合も変分原理はきわめて有効であった．

話を元にもどそう．ハミルトンの立場でのラグランジュ関数は式(4.13)で与えられるから，作用積分は，

$$I=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sum_{k=1}^{n}p_k\mathrm{d}q_k-\int_{t_1}^{t_2}H\mathrm{d}t \quad (4.23)$$

と書くことができる．I が $q^{(2)}=q(t_2)$，$q^{(1)}=q(t_1)$，t_2，t_1 の関数であることは式(4.1b)のところで述べたが，この式から，

$$p_k(t_2)=\frac{\partial I}{\partial q_k(t_2)}, \qquad p_k(t_1)=-\frac{\partial I}{\partial q_k(t_1)} \quad (4.24\mathrm{a})$$

$$H(t_2)=-\frac{\partial I}{\partial t_2}, \qquad H(t_1)=\frac{\partial I}{\partial t_1} \quad (4.24\mathrm{b})$$

という関係式があることがわかる．両端点における運動量の値がその点の座標の関数であることはすでに述べたが，式(4.24a) はその関係を明示するものである．これらの関係式の導出と内容については，4.2節，4.3節および5章で詳しく議論したい．

単純な保存系 $L=T-V$ の場合，エネルギーは保存され $H=$

E(定数)とおいてよいので，式(4.23)第2項は $E(t_2-t_1)$となる．この場合に話を限れば，変分原理は，

$$\delta S=0, \qquad S=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sum_{k=1}^{n}p_k \mathrm{d}q_k \tag{4.25}$$

と書き直すことができる．歴史的には S が作用とよばれていたものだ．S の極値は最小である場合が多いので，変分原理を最小作用の原理ということがある．かつて，これを神の啓示のように解釈した人もいたのである．

単純な保存系のラグランジアンは式(3.1)であり，エネルギー保存則，

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k+V(q)=E \tag{4.26}$$

が成立する(正定数 E はエネルギーの値)．$\dot{q}_j\dot{q}_k=(\mathrm{d}t)^{-2}\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k$ と式(4.26)は，

$$\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sqrt{\frac{\sum_j\sum_k M_{jk}\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k}{2(E-V)}}=t_2-t_1 \tag{4.27}$$

を与える．式(1.42)や式(1.47)の一般化だ．この場合，$p_k=\sum_i M_{kj}\dot{q}_j$ を考慮すれば，式(4.25)の作用 S は，

$$S=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sqrt{2(E-V)\sum_j\sum_k M_{jk}\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k} \tag{4.28}$$

と書くことができる．この被積分関数によって配位空間における微小“距離” $\mathrm{d}s$ を定義すれば，積分(4.28)は2点 ($q^{(1)}$, $q^{(2)}$) 間の“距離”となり，最小作用の原理は配位空間の“測地線”を決定する変分原理，

$$\delta\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\mathrm{d}s=0 \tag{4.29}$$

になる．自由粒子(V=一定)の場合，これはもちろん直線を与える．

力学の変分原理は幾何光学の**フェルマー** (P. de Fermat) **の原理**に比較される．「光の経路は通過時間が最小になるような経路をとる」というものだ．幾何光学と力学との類似性はいろいろな局面でとり上げられてきた．幾何光学と波動光学の関

係を力学にもち込んで波動力学が生れたことはよく知られている．5.4.2 項を見ていただきたい．

4.2 変分原理と保存則

力学系の変換不変性または対称性が保存則の成因であることはいままで何回も強調してきた．この問題を作用積分 I に対する変分問題の立場から見直そう．力学の正準形式では，力学系を規定する最も基本的な量はラグランジアン L または作用積分 I であるから，力学系の変換不変性や対称性は当然 I にも反映しているはずだ．そこに着目して保存則を導くのがこの節の仕事である．

作用積分 $I(\mathrm{B};\mathrm{A})$ の式(4.1b)に注目していただきたい．運動方程式を求める変分原理では，両端点の座標 $\mathrm{A}(q^{(1)}, t_1)$ と $\mathrm{B}(q^{(2)}, t_2)$ を固定して途中の経路についての変分をとって，式(4.5)を設定した．ここでは，これと違う変分をとりたい．すなわち，式(4.5)を満足する運動経路または運動方程式(4.10)はすでにわかっているという前提に立って，運動方程式に従う経路をごくわずかずらせるという変分をとるのである．この変分は両端点を固定していたのでは実現しない．両端の微小移動，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &\longrightarrow \mathrm{A}'(q^{(1)}+\delta q^{(1)}, t_1+\delta t_1) \\
\mathrm{B} &\longrightarrow \mathrm{B}'(q^{(2)}+\delta q^{(2)}, t_2+\delta t_2)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

を必要とする．経路の変分式(4.2)はそのまま使用してよいが，内容が違う．端点条件(4.3)は成立せず，$q(t)$ は式(4.10)に従って変動するのである．この経路変分に対して作用積分の変化 $\delta I = I(\mathrm{B}';\mathrm{A}') - I(\mathrm{B};\mathrm{A})$ を求めたい．もしもこの変分を生む変数変換(4.2)に対して作用積分 I が不変ならば，$\delta I=0$ が成立し，これが保存則を与えるはずである．

はじめに，一般運動量の保存則を導出しよう．それには両端点の時刻は動かさない．つまり，$\delta t_1 = \delta t_2 = 0$ とする．図 4.4

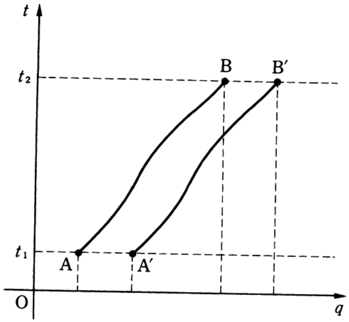


図 4.4 経路の変分と運動量保存則

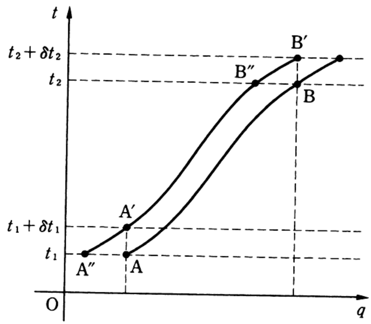


図 4.5 経路の変分とエネルギー保存則

を見よ．式(4.1)に式(4.2)を代入し $\delta q(t)$ の1次までとれば，この場合も式(4.8)が得られる．しかし，今回は $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$ は成立せず，またその第2項は経路が運動方程式を満足しているため消える．結局，

$$\delta I=\sum_{k=1}^{n}\{p_k(t_2)\delta q_k(t_2)-p_k(t_1)\delta q_k(t_1)\} \tag{4.31}$$

が成立する（正準運動量の定義式 $p_k=(\partial L/\partial \dot{q}_k)$ を用いた）．変換 $q_k(t)\to q_k(t)+\delta q_k(t)$ に対して I が不変ならば $\delta I=0$ であり，式(4.31)は，

$$\sum_{k=1}^{n}p_k(t_2)\delta q_k(t_2)=\sum_{k=1}^{n}p_k(t_1)\delta q_k(t_1) \tag{4.32}$$

を与える．これは一般的な保存則，

$$\sum_{k=1}^{n}p_k(t)\delta q_k(t)=一定 \tag{4.33}$$

の成立を意味している．例として，特定番号 j の一般座標 q_j が循環座標である場合を考えれば，変換 $\delta q_k(t_2)=\varepsilon\delta_{kj}$ に対して $\delta I=0$ だから（ε は微小量）式(4.32)または式(4.33)は q_j に正準共役な一般運動量 p_j の保存則になる．また，もっと一般的な変換(2.39)（$\delta q_k(t)=\varepsilon g_k(q,t)$）に対して $\delta I=0$ であれ

ば，式(4.33)はネーターの定理(2.41)を与える．

次に，端点の一般座標の値を固定して，端点時刻だけをごくわずか変化させよう．$t_1 \to t_1+\delta t_1$，$t_2 \to t_2+\delta t_2$ とする．図4.5を見ていただきたい．端点はA′，B′に変るが，経路A→BとA′→B′ はやはり運動方程式に従うようにとるわけだ．この場合の I の変分は，

$$\delta I=\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

$$=L(t_2)\delta t_2-L(t_1)\delta t_1+\sum_{k=1}^{n}\{p_k(t_2)\delta q_k(t_2)-p_k(t_1)\delta q_k(t_1)\} \quad (4.34)$$

である．時刻 t_2，t_1 におけるラグランジアンの値を $L(t_2)$，$L(t_1)$ と書いた．第3項の $\delta q_k(t_2)$ と $\delta q_k(t)$ はそれぞれ時刻 t_2，t_1 でとった一般座標 q_k のずれ（図4.5でいえば，B″BおよびA″A）であるが，B′とBおよびA′とAの一般座標値を一致させておくという条件によれば，

$$\delta q_k(t_2)=-\dot{q}_k(t_2)\,\delta t_2, \qquad \delta q_k(t_1)=-\dot{q}_k(t_1)\,\delta t_1 \quad (4.35)$$

でなければならない．こうして，

$$\delta I=-H(t_2)\delta t_2+H(t_1)\delta t_1 \quad (4.36)$$

が得られる．作用積分 I が時間原点の移動に際して不変であれば，時間変数の一様な無限小のずらし $\delta t_2=\delta t_1=\varepsilon$ に対して $\delta I=0$ が成立し，式(4.36)はエネルギー保存則，

$$H(t_2)=H(t_1) \quad (4.37)$$

を与える．$H(t_2)$，$H(t_1)$ は時刻 t_2，t_1 でのハミルトニアンの値である．

このようにして，作用積分の変換不変性または対称性から各種運動量やエネルギーの保存則が出てくることがわかった．いずれも，すでに2章で見てきた事実の繰り返しである．

なお，恒等式，

$$\delta I=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial I}{\partial q_k(t_2)}\delta q_k(t_2)+\frac{\partial I}{\partial q_k(t_1)}\delta q_k(t_1)\right\} \quad (4.38a)$$

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial t_2}\delta t_2 + \frac{\partial I}{\partial t_1}\delta t_1 \tag{4.38b}$$

を式(4.31)，式(4.36)と見比べれば，式(4.24a)，(4.24b)が得られることは明らかだろう．

4.3 変分原理の統合

4.1節では運動方程式を与える変分原理を，4.2節では保存則を与える変分法則を説明した．このような事実を考慮すれば，すべての力学法則と関係式が作用積分 I の適当な変分問題から出てくることが予想される．この節ではこれらの法則等を統合する“統一的”変分原理について語ろう．

すべての可能な場合を考えれば，次の3種類の変分 $\delta^{(1)}$，$\delta^{(2)}$，$\delta^{(3)}$ がありうる．

(i) 経路のずらし $q_k(t) \to q_k(t) + \delta^{(1)} q_k(t)$,

(ii) 初期終期時刻の変更 $t_1 \to t_1 + \delta^{(2)} t_1$，$t_2 \to t_2 + \delta^{(2)} t_2$,

(iii) 外力の付加などを含む力学系の変更 $L \to L + \delta^{(3)} L$．

この3種類の変分が引き起す I の第1変分はまず，

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{t_1+\delta^{(2)}t_1}^{t_2+\delta^{(2)}t_2} \{L(q+\delta^{(1)}q,\ \dot{q}+\delta^{(1)}\dot{q},\ t) + \delta^{(3)}L(q,\ \dot{q},\ t)\}\mathrm{d}t \\
&\qquad - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot{q},\ t)\mathrm{d}t \\
&= L(t_2)\delta^{(2)}t_2 - L(t_1)\delta^{(2)}t_1 \\
&\qquad + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta^{(3)}L + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta^{(1)}q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta^{(1)}\dot{q}_k\right]\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{4.39}$$

である．変分 $\delta^{(1)}$ は運動経路に沿っての変動とは独立だから，式(4.7)と同じように $\delta^{(1)}\dot{q}_k(t) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\delta^{(1)}q_k(t)$ とおくことができる．ゆえに，式(4.39)の最後の項は部分積分によって，

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta^{(1)}q_k\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta^{(1)}q_k\mathrm{d}t$$

となる．しかし，時刻 t_1，t_2 における q_k の変化は $\delta^{(1)}q_k(t_i)$

($i=1,2$) ではなく，$\delta^{(1)}$ と $\delta^{(2)}$ の合成である，

$$\delta q_k(t)=\delta^{(1)}q_k(t_i)+\dot{q}_k(t_i)\delta^{(2)}t_i \qquad (i=1,2) \tag{4.40}$$

によって与えられるはずだ．この式を使えば，I の第1変分(4.39)は，

$$\begin{aligned}\delta I=&\sum_{k=1}^{n}[p_k(t_2)\delta q_k(t_2)-p_k(t_1)\delta q_k(t_1)]\\&+[-H(t_2)\delta^{(2)}t_2+H(t_1)\delta^{(2)}t_1]\\&+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta^{(3)}L(q,q,t)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta^{(1)}q_k\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.41}$$

のように整理される．

だが，この限りでは式(4.41)は恒等式にすぎない．いうまでもなく，法則性は，

$$\delta I=0 \tag{4.42}$$

とおくことによって得られる．例えば，端点 A，B を固定して $\delta q_k(t_1)=\delta q_k(t_2)=0$，$\delta^{(2)}t_1=\delta^{(2)}t_2=0$ とおき，力学系を変更しないとして $\delta^{(3)}L=0$ をとり，式(4.42)を要求すれば，運動方程式(4.10)が出てくる．この場合の変分は図(4.3) に示した純粋の経路変分 $\delta^{(1)}$ だけであり，運動法則を設定するための変分原理である．これは4.1節で学んだ．次に，運動方程式を満足する経路をとり，また力学系の変更を考えなければ，式(4.41)の右辺第2列は消えて，

$$\begin{aligned}\delta I=&\sum_{k=1}^{n}[p_k(t_2)\delta q_k(t_2)-p_k(t_1)\delta q_k(t_1)]\\&+[-H(t_2)\delta^{(2)}t_2+H(t_1)\delta^{(2)}t_1]\end{aligned} \tag{4.43}$$

となる．右辺の変分を与える変換に対して作用積分 I が不変ならば，式(4.42)が成立して一般運動量またはエネルギーの保存則を与える．これは4.2節で見たとおりだ．なお，式

(4.43) は式(4.31)と式(4.36)を統合した変分式であり，式(4.24)導出の基礎となるものである．これはすでに4.2節末で説明した．5章で議論する正準変換とも密接な関係があるので記憶しておいてほしい．

ハミルトンの立場に移行しよう．簡単のため，以下 $\delta^{(3)}L=0$ とおいて話を進める．4.1節で説明したように，経路の両端点A，Bにおける力学変数 q，p の値 $q^{(1)}$，$p^{(1)}$，$q^{(2)}$，$p^{(2)}$ すべてを独立に指定することはできない．これまでと同様に，まず $q^{(1)}$ と $q^{(2)}$ を両端点指定の独立変数として選ぼう．したがって，独立変分として扱えるのは $\delta q_k(t_1)$ と $\delta q_k(t_2)$ だけであり，$\delta p_k(t_1)$ と $\delta p_k(t_2)$ は独立変分ではない．ハミルトンの立場の作用積分の式(4.14)から出発して，上と同じように第1変分を計算すれば，

$$\delta I=\sum_{k=1}^{n}[p_k(t_2)\delta q_k(t_2)-p_k(t_1)\delta q_k(t_1)]$$
$$+[-H(t_2)\delta^{(2)}t_2+H(t_1)\delta^{(2)}t_1]$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k-\left(\dot{p}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right\}\mathrm{d}t \quad (4.44)$$

となる．両端点を固定したうえで ($\delta q_k(t_1)=\delta q_k(t_2)=0$，$\delta t_1=\delta t_2=0$)，$\delta I=0$ を要求すれば，ハミルトンの正準方程式が得られる．これは4.1節の仕事であった．運動方程式に従う経路に対しては式(4.44)右辺第3列は消えて，式(4.43)と同じ式が残り，保存則などについて上とまったく同様の議論ができる．

いま，端点Aを固定したうえで ($\delta q_k(t_1)=0$，$\delta^{(2)}t_1=0$)，さらに t_2 を改めて t と書けば，

$$\delta I(t)=\sum_{k=1}^{n}p_k(t)\delta q_k(t)-H(q,p,t)\delta^{(2)}t \quad (4.45)$$

である．式(4.45)は $\delta q_k(t)$ を独立変分とする式であることに注意してほしい．この場合，式(4.24)は次のように書き直せる．

$$\frac{\partial I}{\partial t}=-H(q, p, t), \qquad p_k=\frac{\partial I}{\partial q_k} \tag{4.46}$$

第1式に第2式を代入すれば，作用積分 $I(q, t)$ に対する偏微分方程式，

$$\frac{\partial I}{\partial t}=-H\left(q, \frac{\partial I}{\partial q}, t\right) \tag{4.47}$$

が得られる．これを**ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式**という．解析力学の理論体系の中で重要な役割を担っているものだ．その意味と役割については，5章で詳しく議論する予定である．なお，t を一定にして $(\delta^{(2)}t=0)$ 式(4.45)を $p_k(t)$ で偏微分すれば，

$$\delta q_k(t)=\frac{\partial}{\partial p_k(t)}\delta I(t) \tag{4.48}$$

が得られる．

これまでは，端点における q，p の値 $q^{(1)}$，$p^{(1)}$，$q^{(2)}$，$p^{(2)}$ のうち，$q^{(1)}$ と $q^{(2)}$ の2組を独立に指定するという記述方式をとってきた．その代りに $p^{(1)}$，$p^{(2)}$ を選んでもよい．その場合はラグランジアンに全微分 $-(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\sum_k p_k q_k$ を加えておく必要がある．なぜならば，運動方程式は変らず，修正したラグランジアン，

$$L=-\sum_{k=1}^{n} q_k \dot{p}_k-H(q, p, t) \tag{4.49}$$

は同じ力学系を表すからである．これを式(4.1)に入れ，同じようにして第1変分を求めれば，式(4.44)に相当する式に至る．その式は右辺第1項が，

$$-\sum_{k=1}^{n}[q_k(t_2)\delta p_k(t_2)-q_k(t_1)\delta p_k(t_1)] \tag{4.50}$$

である点は違うが，他は式(4.44)とまったく同じである．式(4.45)に対応する式は，

$$\delta I(t)=-\sum_{k=1}^{n} q_k(t)\delta p_k(t)-H(q, p, t)\delta^{(2)}t \tag{4.51}$$

となる．今回は$\delta p_k(t)$が独立変分である．これから，

$$\delta p_k(t)=-\frac{\partial}{\partial q_k(t)}\delta I(t) \tag{4.52}$$

が得られる．

さて，任意の力学量 $F(q, p, t)$ の変分をとろう．

$$\delta F(q, p, t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k\right)+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\delta^{(2)}t \tag{4.53}$$

第1項は q と p の値の変化に対応する F の変分であり，運動による変動とは独立なものである．運動による変動はすべて第2項を通して取り入れた．それが時間変数 t について全微分をとった理由である．式(4.48)と式(4.52)を式(4.53)に入れると，F の変分に対する一般式として，

$$\delta F=\{F, \delta I\}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\delta^{(2)}t \tag{4.54}$$

が出てくる．{ , }はポアッソンかっこ式．この式はこれまでに登場してきたほとんどすべての方程式や関係式を統合したものになっている．いろいろな変分を適宜とりながら，式(4.54)の内容を見て行こう．

(i) $\delta^{(2)}t=0$，$F=q_j$ の場合： δq_j の式の計算だから，δq_k を独立変分としてとる立場の式(4.45)を使うと便利だ．そのとき，式(4.54)は，

$$\delta q_j=\{q_j, \sum_{k=1}^{n}p_k\delta q_k\}=\sum_{k=1}^{n}\delta q_k\{q_j, p_k\}$$

となり，ただちに次式が得られる．

$$\{q_j, p_k\}=\delta_{jk} \tag{4.55a}$$

(ii) $\delta^{(2)}t=0$，$F=p_j$ の場合： 今度は δp_k を独立変分として扱う式(4.51)の δI を用いるとよい．式(4.54)から，

$$\delta p_j=-\sum_{k=1}^{n}\delta p_k\{p_j, q_k\}, \qquad \therefore\quad \{p_j, q_k\}=-\delta_{jk} \tag{4.55b}$$

(iii) $\delta^{(2)}t=0$，$F=q_j$ の場合： δp_k を独立変分とする式(4.51)を使えば $\delta q_j=0$ だから，式(4.54)によって，

$$0=\sum_{K=1}^{n}\delta p_k\{q_j, q_k\}, \qquad \therefore \quad \{q_j, q_k\}=0 \tag{4.55c}$$

(iv) $\delta^{(2)}t=0$, $F=p_j$ の場合： 式(4.45)を使えば $\delta p_j=0$ だから，式(4.54)によって，

$$0=\sum_{k=1}^{n}\delta q_k\{p_j, p_k\}, \qquad \therefore \quad \{p_j, p_k\}=0 \tag{4.55d}$$

いうまでもないが，式(4.55a)～(4.55d)は正準変数 q，p に対するポアッソンかっこ式(2.71)にほかならない．

(v) $\delta^{(2)}t(\neq 0)$ 以外の変分がすべてゼロである場合： 式(4.54)は，

$$\delta F=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\delta^{(2)}t-\{F, H\delta^{(2)}t\}$$

となるが，q と p を固定して $\delta q=0$ と $\delta p=0$ としたため，$\delta F=(\partial F/\partial t)\delta^{(2)}t$ である．こうして，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F, H\} \tag{4.56}$$

が得られる．これは力学量 F の運動方程式(2.68)そのものだ．式(4.54)には運動方程式も入っていたのである．

(vi) 特定番号の $\delta q_j(\neq 0)$ 以外の変分がすべてゼロである場合： 式(4.45)の δI を用いれば，式(4.54)は，

$$\delta F=\{F, p_j\delta q_j\}$$

となる．このとき $\delta F=(\partial F/\partial q_j)\delta q_j$ とおいてよいので，ただちに，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\partial q_j}=\{F, p_j\} \tag{4.57}$$

を得る．これは正準運動量の役割を示す式(2.77)である．

(vii) 特定番号の $\delta p_j(\neq 0)$ 以外の変分がすべてゼロである場合： 式(4.51)の δI を使って(vi)の場合と同じようにやれば，式(4.54)は，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\partial p_j}=-\{F, q_j\} \tag{4.58}$$

を与える．これは式(2.79)にほかならない．式(4.56)，(4.58)には各種の保存則が含まれていることは2.2節の議論からも明らかであろう．

式(4.41)または式(4.44)をもった式(4.42)は運動方程式，各種保存則，基本的な関係式を統合したものであり，“統一的”変分原理というにふさわしい．

問　　題

4.1 変分原理の古典的問題を提供しよう．質量 m の質点が，一様な重力場（重力の加速度 g）中の一つの点 P から下方にある他の点 Q まで滑らかな曲面に沿って滑り落ちるとき，所要時間を最短にするには曲面の形をどのように選べばよいかという問題である．簡単のため初速度をゼロとすれば，運動は P と Q を含む鉛直面内で行われ，曲面はその平面上の曲線となる．その運動平面上に，P を原点とする座標系を設定し水平方向に x 軸，鉛直線上方に y 軸をとり，運動曲線を $y=-f(x)$ としよう．エネルギー保存則は $E=(m/2)[1+(f')^2]\dot{x}^2-mgf$ であり，初期条件のため $E=0$ だから，所用時間は，

$$T[f]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_Q}\sqrt{\frac{[1+(f')^2]}{f}}\,\mathrm{d}x$$

となる．$\delta T[f]=0$ から f の方程式を求め，それを解けばよい．

4.2 2章の問題2.2では，q_k が循環座標である場合に，$\dot{q}_k$ を保存量 p_k の値 α_k と他の $(q_j,\ \dot{q}_j)(j\neq k)$ で書き直して q_k を消去する有効ラグランジアン $\tilde{L}$ を与えた．これによって作用積分 $\tilde{I}=\int\tilde{L}\mathrm{d}t$ をつくれば，変分原理 $\delta\tilde{I}=0$ が他の変数 $q_j(j\neq k)$ の正しい方程式を与えることを示せ．

4.3 ラグランジアンが q_k を含むが，$\dot{q}_k$ に依存しない場合，$\partial L/\partial q_k=0$ によって q_k は他の $(q_j,\ \dot{q}_j)(j\neq k)$ によって表すことができる．この場合の有効ラグランジアンを求めよ．

4.4 電磁場 $(\phi, \boldsymbol{A})$ 中にある電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{J}$ をもつ連続体の作用積分の電磁相互作用部分は $I_{\mathrm{INT}}=\int^{t} L_{\mathrm{INT}}\,\mathrm{d}t$ である (L_{INT} は式(3.128)で与えられている)．変分式(4.41)ですべての力学変数が運動方程式を満たしているとし，端点条件を固定すれば，$\delta I=\int^{t}\delta^{(3)}L\mathrm{d}t$ である．変分 $\delta^{(3)}$ として無限小ゲージ変換 $\delta\phi=-c^{-1}\varepsilon\dot{\chi}$，$\delta\boldsymbol{A}=\varepsilon\nabla\chi$ (ε は微小量) をとり，それに対する作用積分の不変性を要求すると，電荷保存則(3.99)が出てくることを証明せよ．

5　正準変換とハミルトン-ヤコビの偏微分方程式

正準変数から正準変数への変換を**正準変換**という．この章では，はじめに，正準変換を定義してその一般的な性質を見た後，正準変換に対する不変量の例をいくつか説明する．次に，静止系または循環座標系への正準変換を与える母関数がハミルトン-ヤコビの偏微分方程式を満足することを示し，その内容と役割について研究しよう．歴史的には，ハミルトン-ヤコビの理論は古典力学から量子力学への導入路であった．

5.1　正準変換の定義

2章では，ニュートンの方程式からラグランジュの方程式に移るとき，直角座標変数から一般座標変数への変数変換を行った．これは考えている力学系に適した変数を採用して問題を解きやすくしようとするものであった．一つの一般座標変数からさらに別の一般座標変数に変換することも考えられる．いま，一般座標 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ から別の一般座標 $Q=(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$ への座標変換を考えよう．いうまでもなく，全配位空間の点は q または Q によって完全かつ一義的に指定されなければならない．q と Q の対応関係は1対1であり，変換 $q \to Q$ は逆変換 $Q \to q$ をもつ．座標変換である以上，q と Q

との関数関係に一般運動量が介入するはずはない．しかし，新しい変数の時間微分は古い変数の時間微分を含み，それは元の正準運動量の関数であるから，新旧運動量の関数関係には座標変数ばかりでなく運動量が介入するはずだ．すなわち，座標変換 $q \to Q$ によって正準力学変数は，

$$q_k \longrightarrow Q_k = Q_k(q_1, q_2, \cdots, q_n; t)$$
$$p_k \longrightarrow P_k = P_k(q_1, q_2, \cdots, q_n; p_1, p_2, \cdots, p_n; t)$$
$$(k=1, 2, \cdots, n) \tag{5.1}$$

のように変換される．座標変換 $q \to Q = Q(q, t)$（式(5.1)第1行）に対してラグランジュの方程式が不変であることは2章で学んだ．ハミルトンの正準方程式も座標変換に際して不変である．なぜならば，座標変換によってラグランジアンを新しい変数 Q で書き表し，標準的な方法で Q に正準共役な一般運動量 P を導入すれば，(Q, P) に対して（(q, p) の場合と）形不変なハミルトンの正準方程式を導けるからである．例えば2.1節および2.2節でしばしば取り上げた中心力場における1個の質点の運動では，直角座標(x, y)から極座標 (r, θ)への座標変換を行ったが，ラグランジアンの書き換えだけでただちに一般運動量 (p_r, p_θ)とルジャンドル変換（したがって正準方程式)を与えてくれた．

しかし，ハミルトンの立場では一般座標と一般運動量はまったく同等な変数として扱いたいので，P は (q, p) 依存性をもつのに Q の p 依存性はないという式(5.1)のアンバランスは少々気になる．そこで，この変換の枠を広げて，一般座標と一般運動量を混合する変換，

$$q_k \longrightarrow Q_k = Q_k(q_1, q_2, \cdots, q_n; p_1, p_2, \cdots, p_n; t)$$
$$p_k \longrightarrow P_k = P_k(q_1, q_2, \cdots, q_n; p_1, p_2, \cdots, p_n; t)$$
$$(k=1, 2, \cdots, n) \tag{5.2}$$

を考えようというのである．式(5.1)よりも式(5.2)の方が変換枠は大きいので，問題の簡単化や力学の理論内容の検討には便利かも知れないという期待がある．だが，式(5.2)のままで

はあまりにも枠が広すぎる．少なくとも，新しい変数の組 (Q, P) が再び正準変数にならなければ話にならない．すなわち，新旧いずれの変数で書いてもハミルトンの正準方程式が形不変であるような変換だけを扱いたい．このような正準変数から正準変数への変換を**正準変換**という．正準変換は座標変換(5.1)よりも広く，これを可能にするハミルトンの立場はたしかに優れている．単なる座標変換(5.1)はもちろん一種の正準変換である．

正準変換 $(q, p)\to(Q, P)$ は新旧変数の間の1対1対応を要求するので，逆変換，

$$
\begin{aligned}
&Q_k \longrightarrow q_k = q_k(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n ; P_1, P_2, \cdots, P_n ; t)\\
&P_k \longrightarrow p_k = p_k(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n ; P_1, P_2, \cdots, P_n ; t)\\
&\quad (k=1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

が存在しなければならない．今後，両変数の関係を簡単に，

$$
\begin{aligned}
Q&=Q(q, p, t), \qquad P=P(q, p, t)\\
q&=q(Q, P, t), \qquad p=p(Q, P, t)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

と書くことがある．

さて，新しい変数の組 (Q, P) が正準変数であるためには，新しいハミルトニアン $K(Q, P, t)$ が存在して，(q, p) の場合と同形の正準方程式，

$$
\dot{Q}_k=\frac{\partial K}{\partial P_k}, \qquad \dot{P}_k=-\frac{\partial K}{\partial Q_k} \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{5.5}
$$

が成立しなければならない．変分原理によれば，この方程式は次の作用積分の極値問題として得られるはずだ．

$$
I'=\int_{t_1}^{t_2} L'\mathrm{d}t; \tag{5.6}
$$

$$
L'=\sum_{k=1}^{n} P_k\dot{Q}_k-K(Q, P, t) \tag{5.7}
$$

一方，元の変数 (q, p) の正準方程式は L の式(4.13)をもつ作用積分 I (式(4.14)を見よ)の極値問題から導かれていた．したがって，L から L' に移行するには，式(4.13)の (q, p) を

(Q, P)で書き直す必要がある．しかし，それだけでは足りないのだ．運動方程式を与える変分原理の立場で見れば，$L-L'$はゼロではなく，独立な力学変数の関数の（時間についての）全微分だけの任意性がある．その関数を W とすれば，作用積分の差 $I-I'=W_2-W_1$（W_1，W_2 は両端点での W の値）は変分をとればゼロとなり，運動法則に何の影響も与えないからである．しかし，L と L' との関係を明確に，

$$L=L'+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{5.8}$$

または，

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - H = \sum_{k=1}^{n} P_k \dot{Q}_k - K + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{5.9}$$

と書いてみればわかるように，関数 W は新旧変数の関係を与えてくれる．いい換えれば，式(5.8)または式(5.9)はハミルトンの正準方程式を形不変にするような変数変換$(q, p)\to(Q, P)$すなわち，正準変換を生む．関数 W を一つ与えれば，変換が一つ確定する．その意味で W を正準変換の**母関数**という．母関数 W を与えたとき，どのような正準変換が生れるかを研究するのが第1の仕事である．

変数は (q, p, Q, P) の4組（$4n$ 個）であるが，独立な変数の組は2組($2n$ 個)だけである．ゆえに，独立変数の関数である母関数 W が新旧変数間の関係を与えるためには，次の4種類の場合が考えられる．(i) q と Q の関数 $W=W(q, Q, t)$ の場合，(ii) q と P の関数 $W=W(q, P, t)$ の場合，(iii) p と Q の関数 $W=W(p, Q, t)$ の場合，(iv) p と P の関数 $W=W(p, P, t)$ である場合．もっと込み入った方法で $2n$ 個の独立変数を選ぶこともできるが，一応この4種類の場合を見ておけば十分である．

(i)　$W=W(q, Q, t)$ の場合：　式(5.9)を等価な微分形式，

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k - H\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} P_k \mathrm{d}Q_k - K\mathrm{d}t + \mathrm{d}W$$

または，

$$dW=\sum_{k=1}^{n}p_k dq_k-\sum_{k=1}^{n}P_k dQ_k+(K-H)dt \tag{5.10}$$

と書き直そう．これに恒等式，

$$dW=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q_k}dq_k+\frac{\partial W}{\partial Q_k}dQ_k\right)+\frac{\partial W}{\partial t}dt \tag{5.11}$$

を代入し，同じ独立微分の係数をゼロとおけば，

$$p_k=\frac{\partial W}{\partial q_k},\qquad P_k=-\frac{\partial W}{\partial Q_k},\qquad K=H+\frac{\partial W}{\partial t} \tag{5.12}$$

という関係式が得られる．これが正準変換 $(q,p)\rightarrow(Q,P)$ を与えるのだが，具体的な手続きは次のようにして行う．W が q と Q の関数だから，第1式 と第2式 はそれぞれ $p=p(q,Q,t)$，$P=P(q,Q,t)$ を与える．はじめの式を Q について解けば，$Q=Q(q,p,t)$．これを後の式に入れて，$P=P(q,p,t)$．これで正準変換による (q,p) と (Q,P) の関数関係がわかった．この関数関係を逆に解いた式，$q=q(Q,P,t)$，$p=p(Q,P,t)$ を式(5.12)の第3式に入れれば，新しい変数で書いた新しいハミルトニアンが生れて，正準変換が完成する．

(ii) $W=W(q,P,t)$ の場合： 今度は独立変数が q と P なので，少しばかり工夫が必要だ．式(5.10)の左辺の dW を $d(W-\sum_k P_kQ_k)$ でおき換えればよい．付け加えた項は全微分のため運動法則には何の影響も与えないが，$-\sum_k P_k dQ-\sum_k Q_k dP_k$ となってその第1項が式(5.10)の右辺第2項を相殺し，式(5.10)自身を，

$$dW=\sum_{k=1}^{n}p_k dq_k+\sum_{k=1}^{n}Q_k dP_k+(K-H)dt \tag{5.13}$$

のように変える．これに式(5.11)と同様の式（右辺かっこ内第2項が $(\partial W/\partial P_k)\ dp_k$ となっている式）を代入して，同じ独立微分の係数をゼロとおけば，今度は，

$$p_k=\frac{\partial W}{\partial q_k},\qquad Q_k=\frac{\partial W}{\partial P_k},\qquad K=H+\frac{\partial W}{\partial t} \tag{5.14}$$

が得られる．q と P の関数 W を与えたとき，式(5.14)から正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ をつくる手続きは(i)の場合と同じようにやればよい．

(iii)　$W=W(p,Q,t)$ の場合：　今度は式(5.10)の左辺の $\mathrm{d}W$ を $\mathrm{d}(W+\sum_k p_k q_k)$ でおき換えておけばよい．このとき，式(5.10)は，

$$\mathrm{d}W=-\sum_{k=1}^{n}q_k\mathrm{d}p_k-\sum_{k=1}^{n}P_k\mathrm{d}Q_k+(K-H)\mathrm{d}t \tag{5.15}$$

となり，式(5.11)と同様の式（右辺かっこ内第1項が $(\partial W/\partial p_k)\mathrm{d}p_k$ となっている式）と一緒にすれば，

$$q_k=-\frac{\partial W}{\partial p_k},\qquad P_k=-\frac{\partial W}{\partial Q_k},\qquad K=H+\frac{\partial W}{\partial t} \tag{5.16}$$

が出てくる．p と Q の関数 W を与えて正準変換をつくる方法は(i)や(ii)の場合と同様だ．

(iv)　$W=W(p,P,t)$ の場合：　この場合は式(5.10)の $\mathrm{d}W$ を $\mathrm{d}(W+\sum_k p_k q_k-\sum_k P_k Q_k)$ でおき換えておくとよい．そのとき，式(5.10)は，

$$\mathrm{d}W=-\sum_{k=1}^{n}q_k\mathrm{d}p_k+\sum_{k=1}^{n}Q_k\mathrm{d}P_k+(K-H)\mathrm{d}t \tag{5.17}$$

となり，式(5.11)と同様の式（右辺かっこ内が $(\partial W/\partial p_k)\mathrm{d}p_k+(\partial W/\partial P_k)\mathrm{d}P_k$ となっている式）の助けで，

$$q_k=-\frac{\partial W}{\partial p_k},\qquad Q_k=\frac{\partial W}{\partial P_k},\qquad K=H+\frac{\partial W}{\partial t} \tag{5.18}$$

を与える．p と P の関数 W を与えて正準変換をつくる方法は上の場合と同様である．

これで正準変換を設定する方法がわかった．しかし，一般的に過ぎて消化しにくいかもしれない．具体例が必要だが，それは次節にまかせて，その前に前節で述べた作用積分の変分と正準変換との関係を見ておこう．一般論が続くが，もう少し我慢していただきたい．

まず，$W=W(q,Q,t)$ の場合(i)を選ぶ．変分 $q_k\to$

$q_k+\delta q_k$, $Q_k\to Q_k+\delta Q_k$, $\delta t=0$ をとれば，それに対応する W の変分は，

$$\delta W=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial W}{\partial Q_k}\delta Q_k\right) \tag{5.19}$$

である．これに式(5.12)を代入すれば，

$$\delta W=\sum_{k=1}^{n}p_k\delta q_k-\sum_{k=1}^{n}P_k\delta Q_k \tag{5.20}$$

が得られる．繰り返しだが，これが正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ を与える母関数 W に対する条件である．式(5.20)と式(4.31)とを対比すれば，式(4.31)は運動による時間的変化 $(q(t_1),p(t_1))\to(q(t_2),p(t_2))$ が，

$$W=-I=-\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t \tag{5.21}$$

を母関数とする正準変換であることを語っている．これは作用積分とそれを与えるラグランジアンの物理的意味を示すものだ．これまで，繰り返しラグランジアンを使ってきたが，その意味はいま一つはっきりしなかった．単純保存系では $L=T-V$ でありハミルトニアンは $H=T+V$ であるが，後者がエネルギーという明確な物理的意味をもつのに $L=T-V$ は何を意味するのかわからなかった．いまや，ラグランジアンには，その時間積分が力学的変数の時間的変化を正準変換として与える母関数だという確かな意味が付けられたのである．この意味付けについては，無限小正準変換に関連して次節でもう一度議論しよう．他の場合(ii)，(iii)，(iv)でも同様な話ができるが，これ以上立ち入ることはやめる．

5.2　正準変換いろいろ

この節では，いくつかの具体例を見ながら正準変換の内容理解を深めることにしよう．

a　恒　等　変　換

恒等変換とは何もしないという変換，すなわち，

$$q_k \longrightarrow Q_k = q_k \quad \text{および} \quad p_k \longrightarrow P_k = p_k \tag{5.22}$$

をいう．この変換の母関数は，

$$W(q, P) = \sum_{k=1}^{n} q_k P_k \tag{5.23}$$

である．なぜならば，前節(ii)の場合の式(5.14)の関数 W に式(5.23)を使えば，

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k} = P_k, \qquad Q_k = \frac{\partial W}{\partial P_k} = q_k \tag{5.24}$$

となるからである．

b　座　標　変　換

座標変換が一つの正準変換であることはすでに説明した．その母関数は，

$$W(q, P, t) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(q, t) P_k \tag{5.25}$$

である．なぜならば，式(5.14)の第2式により，

$$Q_k = \frac{\partial W}{\partial P_k} = \phi_k(q, t) \tag{5.26}$$

となり，式(5.1)の第1式の形の座標変換を与えるからだ．式(5.14)の第2式は，

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} P_k \tag{5.27}$$

となるが，行列 $(X_{jk}) \equiv (\partial \phi_k / \partial q_j)$ の逆行列 X^{-1} を使えば，

$$P_k = \sum_{j=1}^{n} (X^{-1})_{kj}\, p_j \tag{5.28}$$

が得られる．これが式(5.1)の第2式に相当する式だ．しかし，正準変換の枠内での正準運動量は座標変換の場合より広く，式(5.25)の右辺には任意関数 $\psi(q, t)$ を加えておくべきだろう．そのとき，式(5.26)は変らないが，式(5.27)と式(5.28)の p_j は $p_j - \partial \psi / \partial q_j$ となる．

なお，母関数 $W(p,Q,t)=-\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(Q,t)p_k(+\Psi(Q,t))$ からも式(5.16)によって座標変換 $q_j=\Phi_j(Q,t)$ が得られる．

c 一般座標と一般運動量を取り替える変換

正準変換を導入したことによって変換枠がたいそう広くなり，座標変換では考えられなかったような変換が可能になる．例として，母関数，

$$W(q,Q)=\sum_{k=1}^{n}q_kQ_k \tag{5.29}$$

による変換を考えよう．前節(i)の場合の式(5.12)から，

$$p_k=\frac{\partial W}{\partial q_k}=Q_k, \qquad P_k=-\frac{\partial W}{\partial Q_k}=-q_k \tag{5.30}$$

が得られる．一般運動量を一般座標に，一般座標を一般運動量に変換してしまったわけだ．このような変換は正準変換によってはじめて可能になったものである．正準変換をもつ力学の正準理論にとっては，一般座標と一般運動量はまったく同格である．

d 調和振動子の場合

具体的な運動の1例として，1次元調和振動子の問題を扱っておこう．この問題はすでに何回か議論しているが，一般的な周期運動問題の手本になるはずのものだ．q を位置座標，p を運動量とすれば，ハミルトニアンは $H=(1/2m)p^2+(m\omega^2/2)q^2$（$m$ は質量，ω は角振動数）である．この形を見ると，

$$q=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q, \qquad p=\sqrt{2m\omega P}\cos Q \tag{5.31a}$$

となるような正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ があれば，新ハミルトニアンは，

$$H=K=\omega P \tag{5.31b}$$

になることがわかる．Q が循環座標となって，P は保存される．循環座標系への正準変換を求める問題だ．式(5.31a)を与える正準変換の母関数が，

$$W(q,\,Q)=\frac{m\omega}{2}q^2\cot Q \tag{5.32}$$

であることは容易にわかる．実際，この母関数と式(5.12)は，

$$p=\frac{\partial W}{\partial q}=m\omega q\cot Q, \qquad P=-\frac{\partial W}{\partial Q}=\frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$$

を導き，これから式(5.31b)が得られる．新変数(Q,P)に対するハミルトンの正準方程式は，

$$\dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}=0, \qquad \dot{Q}=\frac{\partial K}{\partial P}=\omega \quad (\text{定数}) \tag{5.33}$$

となって，次の解を与える．

$$P=\frac{E}{\omega} \quad (\text{一定}), \qquad Q=\omega t+\alpha \tag{5.34}$$

E はエネルギーの値，α は定数である．式(5.34)を式(5.31)に入れれば，q と p の時間的変動がわかる．この解はすでに式(1.44)で与えておいたが，記法の違い（$x=q$，$K=m\omega^2$，$\gamma=\alpha-(\pi/2)$）に注意してほしい．

ところで，式(5.34)に注目しよう．Q は本質的には時間変数 t だ．例えば，角周期 ω^{-1} を単位として測れば，t そのものだ．一方，P は本質的にはエネルギー E にほかならない．したがって，この正準変換は時間を一般座標に，エネルギーをそれに正準共役な運動量にとるための変換だったのである．実際，さらに新しい正準変換（$(Q,P)\to(Q'=\omega^{-1}Q,\,P'=\omega P)$）を施せば，$P'=E$ と $Q'=t+(\alpha/\omega)$ が得られる．これは母関数 $W'=\omega^{-1}QP'$ によって実現できる．式(5.14)によれば $P=\omega^{-1}P'$，$Q'=\omega^{-1}Q$ だからだ．こうして，時間変数とエネルギーはそれぞれ互いに正準共役な一般座標と一般運動量と見てよいことがわかった．すでに2.2.3項でも述べた話であるが，後でもう一度議論する機会がある．

e　連続パラメーターを含む正準変換と無限小正準変換

正準力学変数 q と p が連続パラメーター s の関数であり，s による(q,p)の連続的変化が正準変換になっている場合，すな

わち，連続的正準変換を考えよう．このとき，s の無限小変化 $s\to s+\delta s$（δs は微小量）に対応する無限小正準変換，

$$
\begin{aligned}
q_k(s) &\longrightarrow Q_k\equiv q_k(s+\delta s)=q_k(s)+\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}s}\delta s \\
p_k(s) &\longrightarrow P_k\equiv p_k(s+\delta s)=p_k(s)+\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}s}\delta s
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

があるはずだ．この変換の母関数 W は恒等変換の母関数(5.23)と δs の程度しか違わないだろう．したがって，

$$
W(q,P)=\sum_{k=1}^{n}q_kP_k+S(q,P)\delta s \tag{5.36}
$$

とおいてよい．無限小正準変換は関数 $S(q,P)$ を与えることによって確定する．その意味で S を無限小正準変換の**生成関数**ということがある．式(5.14)と式(5.36)から，ただちに，

$$
p_k=\frac{\partial W}{\partial q_k}=P_k+\frac{\partial S}{\partial q_k}\delta s, \qquad Q_k=\frac{\partial W}{\partial P_k}=q_k+\frac{\partial S}{\partial p_k}\delta s
$$

が得られる．ただし，δs の係数では δs の違いを無視し $P_k=p_k$ とおいた．これは変換式，

$$
Q_k=q_k+\frac{\partial S}{\partial p_k}\delta s, \qquad P_k=p_k-\frac{\partial S}{\partial q_k}\delta s \tag{5.37}
$$

を与える．式(5.35)と等置すれば，変数(q,p)の s 依存性は微分方程式，

$$
\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial S}{\partial p_k}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}s}=-\frac{\partial S}{\partial q_k} \tag{5.38}
$$

を満足しなければならないことを知る．

この無限小正準変換による任意の力学量 $F(q,p)$ の変化を計算しよう．

$$
\begin{aligned}
\delta F=F(q+\delta q,p+\delta p)-F(q,p)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k\right) \\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial S}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)\delta s
\end{aligned}
$$

最終行への移行には $\delta q_k=(\mathrm{d}q_k/\mathrm{d}s)\delta s$，$\delta p_k=(\mathrm{d}p_k/\mathrm{d}s)\delta s$ と式

(5.38)を用いた．ポアッソンかっこ式を使って，この式を書き直せば，

$$\delta F=\{F, S\}\delta s \tag{5.39}$$

となる．たしかに，S は無限小正準変換の生成関数というにふさわしい．

さて，式(5.38)をハミルトンの正準方程式（式(2.51)または式(4.18)）に，式(5.39)を式(2.73)に比べてみると，対応 $S\to H$，$s\to t$ の存在がわかる．この対応は，現実の運動によって引き起される力学量の変化（$q(t)\to q(t+\delta t)=q(t)+\dot{q}(t)\delta t$，$p(t)\to p(t+\delta t)=p(t)+\dot{p}(t)\delta t$）が H を生成関数とする無限小正準変換であることを物語っている．本質的に同じ内容の話はすでに5.1節末でラグランジアンや作用積分の物理的意味に関連して述べた．実際，$\delta^{(1)}t_1=0$ とおき，改めて t_2 を t と書けば，式(4.36)から $\delta(-I)=H\,\delta t$ が得られる．$W=-I$ であったから，$H\,\delta t$ が式(5.36)の右辺第2項に等置すべきものだ．これからも対応 $S\to H$，$s\to t$ を見ることができる．

正準変換の重要な場合として静止系または循環座標系への変換がある．しかし，この話は5.4節で詳しく議論するつもりなので，ここでは取り上げない．

正準変換は群を構成する　正準変換の集合には次の性質がある．(i) 2個の正準変換の順次施行は適当な1個の正準変換によっておき換えられる．(ii) 3個の正準変換の順次施行は，1番目と2番目の変換をまとめた1個の正準変換と3番目の変換の順次施行の結果に等しく，同時に1番目変換を先に施行した後2番目と3番目をまとめた1個の正準変換を行った結果にも等しい．(iii)恒等変換は一つの正準変換である．(iv)正準変換の逆変換は必ず存在し，それも正準変換である．この性質をもつ集合を数学では**群**という．正準変換は群を構成するわけだ．性質(i)をあてはめれば，上記の無限小正準変換の順次施行の積み重ねとして表すことが

できる有限時間内の力学変数の時間的変化もまた正準変換である．

5.3　正準変換と不変量

正準変換における不変量を知っておくことは，具体的な問題の解析や理論体系の整備にとって不可欠のことがらである．ここでは，その重要な具体例をいくつか説明する．

a　ポアッソンかっこ式

ポアッソンかっこ式は正準変換の不変量である．正準変換$(q, p) \to (Q, P)$があったとしよう．新旧変数には式(5.2)または式(5.3)のような関数関係がある．具体的には，その関数関係は母関数 W を介して式(5.12)，(5.14)，(5.16)，(5.18)によって与えられる．まず，(q, p) と (Q, P) で書いた力学量 u と v のポアッソンかっこ式をそれぞれ $\{u, v\}_{q,p}$，$\{u, v\}_{Q,P}$ としよう（式(2.67)を見よ）．すなわち，

$$\{u, v\}_{q,p}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k}-\frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}\right) \tag{5.40a}$$

$$\{u, v\}_{Q,P}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial P_k}-\frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial Q_k}\right) \tag{5.40b}$$

となる．第1式は変数 (q, p) で書かれているが，(q, p) は (Q, P) の関数だから，変数 (Q, P) によって書き直せるはずだ．これを実行して，

$$\{u, v\}_{q,p}=\{u, v\}_{Q,P} \tag{5.41}$$

を証明するのが，当面の仕事である．

まず，式(5.40a)の右辺に恒等式，

$$\frac{\partial u}{\partial q_k}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}+\frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_k}=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_k}+\frac{\partial v}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_k}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_k}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}+\frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial q_k}=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k}+\frac{\partial v}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_k}\right)$$

を代入して整理すると，

$$\{u,v\}_{q,p}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial Q_l}\{Q_j,Q_l\}_{q,p}+\frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial P_l}\{P_j,P_l\}_{q,p}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_l}\{Q_j,P_l\}_{q,p}+\frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial Q_l}\{P_j,Q_l\}_{q,p}\right) \tag{5.42}$$

となる．ここまでは変換 $(q,p)\to(Q,P)$ が正準変換でなくても成立する恒等式にすぎない．次に，正準変換の性質を使って，Q や P のポアッソンかっこ式を計算するのである．まず，

$$\{Q_j,Q_l\}_{q,p}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k}-\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k}\right)$$

の第1項で式(5.14)，第2項で式(5.18)を用いると，

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial W}{\partial P_j}=\frac{\partial}{\partial P_j}\frac{\partial W}{\partial q_k}=\frac{\partial p_k}{\partial P_j}$$
$$\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}=\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial W}{\partial P_j}=\frac{\partial}{\partial P_j}\frac{\partial W}{\partial p_k}=-\frac{\partial q_k}{\partial P_j} \tag{5.43a}$$

となるので，

$$\{Q_j,Q_l\}_{q,p}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_k}{\partial P_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_k}+\frac{\partial q_k}{\partial P_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial Q_l}{\partial P_j}=0$$

が成立する．すなわち，

$$\{Q_j,Q_l\}_{q,p}=0 \tag{5.44a}$$

同じようにして，式(5.12)と式(5.16)を使えば，

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_k}=-\frac{\partial^2 W}{\partial Q_j\partial q_k}=-\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}$$
$$\frac{\partial P_j}{\partial p_k}=-\frac{\partial^2 W}{\partial Q_j\partial p_k}=\frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \tag{5.43b}$$

であり，

$$\{P_j, P_l\}_{q,p} = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial P_l}{\partial Q_j} = 0$$

すなわち，

$$\{P_j, P_l\}_{q,p} = 0 \qquad (5.44\text{b})$$

が得られる．また，式(5.14)と式(5.18)から，

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_j \partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_j}, \qquad \frac{\partial Q_k}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_j \partial p_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial P_j} \qquad (5.43\text{c})$$

$$\therefore \quad \{Q_j, P_l\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_k}{\partial P_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial P_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial P_l}{\partial P_j} = \delta_{jl}$$

すなわち，

$$\{Q_j, P_l\} = \delta_{jl} \qquad (5.44\text{c})$$

が成立する．もちろん，

$$\{P_j, Q_l\} = -\delta_{jl} \qquad (5.44\text{d})$$

式(5.44a)～(5.44d)を式(5.42)に代入すれば，ただちに，

$$\{u, v\}_{q,p} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial P_k} - \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial Q_k}\right) = \{u, v\}_{Q,P}$$

が得られるが，これは証明すべき式(5.41)にほかならない．これで，$\{u, v\}_{q,p}$ や $\{u, v\}_{Q,P}$ のように，どの正準変数で書いたかをいちいち指示しなくてもよいことがわかった．すなわち，ポアッソンかっこ式で書いた方程式や関係式はすべて正準変数の選択によらない．

いま，ポアッソンかっこ式の正準変換不変性を証明した．そのために，新しい変数(Q, P)に対するポアッソンかっこ式の式(5.44)が元の変数(q, p)に対する式(2.71)とまったく同形であること，すなわち，式(2.71)の正準変換不変性を証明したのである．ポアッソンかっこ式の正準変換不変性は式(2.71)の不変性と同等であった．

さて，正準変数の組(Q, P)は必ず式(5.44)を満足する．逆に，任意の変数の組(Q, P)（ただし，$Q=Q(q, p)$，$P=P(q, p)$）が式(5.44)を満足するとき，変換$(q, p)\to(Q, P)$は正

準変換であり，変数の組(Q, P)は正準変数であることがわかる．なぜならば，それには式(5.43)が成立しなければならず，式(5.43)は母関数 W の存在とそれに基づく式(5.12)，(5.14)，(5.26)，(5.18)の成立を要求するからである．すなわち，(Q, P)が正準変数であることの必要十分条件は式(5.44)が成立することであった．したがって，ポアッソンかっこ式を不変にするような変換は正準変換であるという結論も生れる．

任意の力学量 u と v は正準変数(q, p)の関数であるが，逆に(q, p)を u と v の関数と見ることもできる．そこで，

$$(u, v)_{q,p}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}-\frac{\partial p_k}{\partial u}\frac{\partial q_k}{\partial v}\right) \tag{5.45}$$

を定義しよう．これを**ラグランジュかっこ式**という．このラグランジュかっこ式もまた正準変換不変性をもち，

$$(u, v)_{q,p}=(u, v)_{Q,P} \tag{5.46}$$

が成立する．証明はポアッソンかっこ式の場合と同じようにやればよい．ラグランジュかっこ式に対しても，ポアッソンかっこ式が満足した式(2.70)と式(2.71)と同形の関係式が存在する．

力学系の独立な自由度が n であるとき，独立な力学量を $2n$ 個選び出すことができる．それらを $u_1, u_2, \cdots\cdot, u_{2n}$ とすれば，正準変数(q, p)は $u_l(l=1, 2, \cdots\cdot, 2n)$ の関数と考えることができる．このとき，2個の力学量のポアッソンかっこ式とラグランジュのかっこ式に対して，

$$\sum_{l=1}^{n}(u_l, u_j)\{u_l, u_{j'}\}=\delta_{jj'} \tag{5.47}$$

が成立する．左辺に各かっこ式の定義式を入れ，和の順序交換をした後，偏微分の公式を使えば，容易に証明することができる．式(5.47)も正準変換に対して不変である．ラグランジュかっこ式も解析力学の理論体系整備に一役買っているが，ポアッソンかっこ式ほど有用ではないので，これ以上立ち入ることはやめておこう．

ポアッソンかっこ式の正準変換不変性の証明を，ここではあえて真正面から偏微分計算を使って式(5.44)を導出することによって与えた．ランダウ-リフシッツの教科書（巻末の参考文献）にはそのような計算は不要だとある．$\{u, v\}_{q,p}$ において v がある仮想的な系のハミルトニアンだとすれば，$\{u, v\}_{q,p} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ であるが，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ はその仮想的な系の運動の性質だけに依存して，変数の選び方にはよらない．したがって，不変性の式(5.38)が式り立つという．読者自らエレガントで簡単な証明方法を工夫していただきたい．

b 積分不変式

母関数 W をもつ正準変換 $(q, p)\to(Q, P)$ に対して式(5.20)が成立することを思い出そう．この両辺を相空間の曲線に沿って点Aから点Bで積分する．左辺は W の全微分だから，積分は W の端点値の差，

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}W = W(\mathrm{B}) - W(\mathrm{A}) \tag{5.48}$$

に等しい．閉曲線Cに沿って一まわり積分する場合は，A=B で $W(\mathrm{A}) = W(\mathrm{B})$ となるから，式(5.48)すなわち式(5.20)の閉曲線積分の左辺はゼロとなり，

$$\oint_{\mathrm{C}} \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k = \oint_{\mathrm{C}'} \sum_{k=1}^{n} P_k \mathrm{d}Q_k \tag{5.49}$$

が得られる．ただし，C と C′ はそれぞれ変数 (q, p) と (Q, P) で見た相空間内の閉曲線である．記号 $\oint_{\mathrm{C}}$，$\oint_{\mathrm{C}'}$ は閉曲線 C，C′ に沿っての積分を表すものだ．この式は正準変換に対する積分不変式，

$$\oint_{\mathrm{C}} \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k = \text{不変} \tag{5.50}$$

の存在を意味する．2.2.2項の単振子の相空間で見たように，振動や回転などの周期運動の場合は現実の運動が相空間内で閉

曲線を描く（ただし，回転の場合は変数の選び方に注意）．式(5.50)の積分をその閉曲線に沿ってとれば，左辺の量(5.5節で作用変数とよぶ量）が保存されることになる．

1次元調和振動子の場合に式(5.49)が成立することを直接の計算で示しておこう．エネルギー保存則は $(1/2m)p^2+(m\omega^2/2)q^2=E$ だから，相空間の軌道は p 軸，q軸方向に長短軸半径 $\sqrt{2mE}$，$\sqrt{2E/m\omega^2}$ をもつだ円になる．このだ円の面積は，

$$\oint p\,\mathrm{d}q=\pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}=\frac{2\pi E}{\omega} \tag{5.51a}$$

である．一方，5.2節d項で導入した新変数 Q，P（式(5.31a)および式(5.34)を見よ）に対しては，$P=E/\omega$ が一定であり，Q は1周期の間に 2π だけ増加する．ゆえに，新変数で計算すれば，

$$\oint P\mathrm{d}Q=\frac{2\pi E}{\omega} \tag{5.51b}$$

たしかに，式(5.49)が成立している．

閉曲線 C，C′ で囲まれる2次元曲面を F((q, p) 空間)，F' ((Q, P) 空間)とすれば，一般に，

$$\oint_{\mathrm{C}}\sum_{k=1}^{n}p_k\mathrm{d}q=\iint_{\mathrm{F}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k$$

$$\oint_{\mathrm{C'}}\sum_{k=1}^{n}P_k\mathrm{d}Q_k=\iint_{\mathrm{F'}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}Q_k\mathrm{d}P_k$$

が成立するので，もう一つの積分不変式，

$$\iint_{\mathrm{F}}\sum_{k=1}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k=\text{不変} \tag{5.52}$$

が得られる．これはむしろ直接証明した方がよい．一般に，2次元曲面上の点は2個の曲線座標によって記述される．それを u，v とすれば，変数変換 $q, p\to u, v$ のヤコビアンはラグランジュかっこ式(5.45)になる．すなわち，$(u, v)_{q,p}=\sum_k\partial(q_k, p_k)/\partial(u, v)$．したがって，F上の曲面積分は，

$$\iint_F \sum_{k=1}^{n} dq_k dp_k = \iint_F \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(q_k, p_k)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_F (u, v)_{q,p} du dv$$

と書くことができる．変数 Q, P についても同様な式が得られるが，ラグランジュかっこ式の変換不変性(5.46)のため，

$$\iint_F \sum_{k=1}^{n} dq_k dp_k = \iint_{F'} \sum_{k=1}^{n} dQ_k dP_k \tag{5.53}$$

すなわち，式(5.52)が成立するというわけである．

さらに次元数の増えた超曲面の面積，

$$\iiiint \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} dq_j dp_j dq_k dp_k \tag{5.54}$$

の不変性なども証明することができるが，これ以上は煩雑になるのでやめる．

c　体積不変の定理（リウビルの定理）

正準変数(q, p)を直角座標としてもつ相空間の領域 Γ は正準変換によって新しい正準変数(Q, P)を直角座標とする相空間の領域 Γ' に変換されるが，その $2n$ 次元体積は不変である．すなわち，

$$\begin{aligned} &\int \cdots_{\Gamma} \int dq_1 \cdots dq_n dq_1 \cdots dp_n \\ &= \int \cdots_{\Gamma'} \int dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n \end{aligned} \tag{5.55}$$

または，

$$\int \cdots_{\Gamma} \int dq_1 \cdots dq_n dq_1 \cdots dp_n = \text{不変} \tag{5.56}$$

が成立する．これを一般に**リウビルの定理**という．すでに1.3節と2.2節では，相空間内の領域はそれを構成する代表点の運動による移動や変形にもかかわらず，体積が不変に保たれることを述べた．これは現実の運動に対するリウビルの定理であった．式(5.55)または式(5.56)は一般の正準変換についてのリウビルの定理である．しかし，連続パラメーターをもつ連続的正準変換は，そのパラメーターを時間変数に生成関数をハミ

ルトニアンにおき換えれば，現実の運動と同等であることが示されている(5.2 節)．2.2 節では微小時間変化に対する体積不変を証明し，それを積み上げて有限時間のリウビルの定理を与えようとしたわけだが，この証明法は連続パラメーターをもつ一般の正準変換にも適用できるものだ．多くの場合，正準変換は連続パラメーターを導入して記述することができるので，リウビルの定理は一応その方法で証明してよい．改めて説明するまでもあるまい．ここでは式(5.55)の証明に正面から取り組もう．

そのためには，変換 $(q,p)\to(Q,P)$ のヤコビアンが，

$$J\equiv\frac{\partial(Q_1,\cdots\cdot,Q_n,P_1,\cdots\cdot,P_n)}{\partial(q_1,\cdots\cdot,q_n,p_1,\cdots\cdot,p_n)}=1 \tag{5.57}$$

であることを証明すればよい．代数学の知識を使って，まず J を，

$$J=\frac{\partial(Q_1,\cdots\cdot,Q_n,P_1,\cdots\cdot,P_n)}{\partial(q_1,\cdots\cdot,q_n,P_1,\cdots\cdot,P_n)}\frac{\partial(q_1,\cdots\cdot,q_n,P_1,\cdots\cdot,P_n)}{\partial(q_1,\cdots\cdot,q_n,p_1,\cdots\cdot,p_n)}$$

と書き換える．第1因子の関数行列式の配列は，$\partial Q_j/\partial q_k$，$\partial P_j/\partial q_k$，$\partial Q_j/\partial P_k$，$\partial P_j/\partial P_k$ からなる4個の正方区に分かれるが，第3区はゼロ行列，第4区は単位行列であるから，ただちに $\partial(Q_1,\cdots\cdot,Q_n)/\partial(q_1,\cdots\cdot,q_n)$ に等しいことがわかる．第2因子も同様に $\partial(P_1,\cdots\cdot,P_n)/\partial(p_1,\cdots\cdot,p_n)=[\partial(p_1,\cdots\cdot,p_n)/\partial(P_1,\cdots\cdot,P_n)]^{-1}$ となる．ゆえに，

$$J=\left(\frac{\partial(Q_1,\cdots\cdot,Q_n)}{\partial(q_1,\cdots\cdot,q_n)}\right)_P\left(\frac{\partial(p_1,\cdots\cdot,p_n)}{\partial(P_1,\cdots\cdot,P_n)}\right)_q^{-1} \tag{5.58}$$

添字 P，q は偏微分に際して一定に保つ量を示す．式(5.14)を使って第1因子行列式と第2因子かっこ内行列式の $j\ k$ 要素を書き直せば，それぞれは，

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 W}{\partial q_k\partial P_j},\qquad \frac{\partial p_j}{\partial P_k}=\frac{\partial^2 W}{\partial P_k\partial q_j}$$

となる．添字 j と k を交換すれば，両者は入れ替るので，式(5.58)の第1因子の行列式は第2因子かっこ内の行列式の要

素を転置したものになっているわけだ．行列式は要素を転置しても値は変らない．ゆえに，$J=1$ が成り立つ．

5.4 ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式

正準変換が問題を簡単化するのに役立てば結構だ．まず，静止系および循環座標系への変換を考える．

5.4.1 静止系と循環座標系への正準変換

正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ によって新しいハミルトニアン K がゼロになれば，それが最高の簡単化だろう．なぜならば，$K=0$ だからハミルトンの正準方程式は，

$$\dot{P}_k=0, \qquad \dot{Q}_k=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{5.59}$$

であり，新変数はすべて一定となるからだ．すなわち，

$$P_k=\alpha_k, \qquad Q_k=\beta_k \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{5.60}$$

となってしまう．α_k と β_k は定数である．力学変数がすべて定数となるような系を**静止系**という．正確には，静止系は式(5.59)が成り立つ場合に実現するので，ハミルトニアン K はゼロとは限らず，Q，P に依存しない t の任意関数であればよい．しかし，今後このような任意性は無視する．いずれにしても，静止系への正準変換$(q,p)\to(Q,P)$が実現したとすれば，変換式 $q=q(Q,P,t)$，$p=p(Q,P,t)$ に式(5.60)を代入して元の変数の時間的変動，

$$\begin{aligned} q_k&=q_k(\beta_1,\cdots,\beta_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)\\ p_k&=p_k(\beta_1,\cdots,\beta_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)\\ &\quad (k=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{5.61}$$

を求めればよい．問題を解く作業は静止系への正準変換を見いだしたところで終っている．

ではどうやって静止系への正準変換を実現するか？　その正準変換の母関数 $W(q,P,t)$ を見いだせばよいのであるが，W を介しての (q,p,H) と (Q,P,K) の関係は式(5.14)で与えら

れているはずだ．式(5.14)で静止系の条件 $K=0$，$P_k=\alpha_k$ を考慮すれば，母関数 $W(q,\alpha,t)$ は n 個の定数 α を含む q と t の関数であり，偏微分方程式，

$$\frac{\partial W(q,t)}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q},t\right)=0 \tag{5.62}$$

を満足しなければならない，式(5.14) 第3式によれば，式(5.62)は $K=0$ そのものである．ただし，$H(q,p,t)$ の中の p は式(5.14) 第1式を使って $\partial W/\partial q$ でおき換えた．式(5.62)を**ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式**という．これは1階の偏微分方程式だから，n 個の任意定数 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$ を含む解 $W(q,\alpha,t)$ があるはずである．この解が得られたとすれば，定数 α_k を P_k に等置することができ，式(5.14) の第1，2式が与える関係式，

$$p_k=\frac{\partial}{\partial q_k}W(q,\alpha,t) \tag{5.63a}$$

$$\beta_k=\frac{\partial}{\partial \alpha_k}W(q,\alpha,t) \tag{5.63b}$$

によって変数(q,p)の t 依存性がわかる．すなわち，式(5.63b) を q について解いて解 $q=q(\beta,\alpha,t)$ を求め，それを式(5.63a)に代入すれば，解 $p=p(\beta,\alpha,t)$ が得られるという処方である．

ところで，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式はすでに式(4.47)として導出済みのものだ．ただし，式(4.47)は式(4.1)によって定義された作用積分 I に対する方程式である．5.1節末の議論によれば，$-I$ は時刻 t_1 から時刻 t_2 への運動による力学変数の時間発展 ($t_2>t_1$) を与える正準変換の母関数であった．その逆変換，すなわち，時刻 t_2 の力学変数を時刻 t_1 の初期値にもどす正準変換の母関数は I である．いい換えれば，母関数 I をもつ変換は常に力学変数の終期値を初期値に取り替える正準変換だ．これはまさに静止系への変換を与えるものではないか．I はいまの場合の W だったのである．逆に，こ

の節で導入した関数 W は I に等しい．なぜならば，W を時間微分すれば，P=一定と $K=0$ のため，

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial W}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n}p_k\dot{q}_k-H=L \tag{5.64}$$

が成立し $W=I$ を与えるからである．すなわち，式(4.47)と式(5.62)とはまったく同内容の方程式だったのである．その意味で式(5.62)の解 W を作用または作用関数とよんでもよい．しかし，式(4.1)という積分式を書いただけでは，母関数 $W=I$ がわかったことにはならない．解 $q=q(t)$ を与えなければ，積分が実行できないからである．特に，ほしい母関数は n 個の任意定数 α_k を含む解であり，これを式(4.1)から求めるには $q=q(\beta,\alpha,t)$ の形の解を用意する必要がある．これがわかっているなら，もはや式(5.62)を解く必要はない．

では，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式(5.62)を直接解くにはどうしたらよいか？　数学の教えによれば，1階の偏微分方程式を解くには特性常微分方程式を解けばよいという．その処方に従って式(5.62)の特性常微分方程式をつくると，ハミルトンの正準方程式が現れる．すなわち，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式を解くにはハミルトンの正準方程式を解かなければならないというわけだ．そもそも，後者を直接解くのを回避し，静止系への変換を行って楽をしようとしたのではなかったか．この望みむなしく，問題は振出にもどってしまったことになる．“困難”の保存則というべきか？

では，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は役に立たないか？　それは違う．この方程式は具体的問題を解く新しい解析方法を提供すると同時に，力学の理論体系の整備・吟味と内容理解の深化に威力を発揮する．

まず，ハミルトニアン H が (q,p) を通す以外には時間 t を生に含まない場合に話を限ろう．このとき，ハミルトニアンは時間的に一定となるので，式(5.62)によれば，$\partial W/\partial t$ は定数にならなければならない．したがって，

$$W(q,\alpha,t)=S(q,\alpha)-Et \tag{5.65}$$

とおくことができる．E はエネルギーの値を表す定数．S は t を含まない．これを微分すれば，

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-E, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_k}=\frac{\partial S}{\partial q_k} \tag{5.66}$$

が得られるので，式(5.62)は，

$$H(q,\frac{\partial S}{\partial q})=E \tag{5.67}$$

となる．これを時間を含まないハミルトン-ヤコビの偏微分方程式という．Sもまた作用関数という．

式(5.62)の場合と同様，式(5.67)を解いて n 個の任意定数 $\alpha_k(k=1,2,\cdots\cdot,n)$ を含む解 $S(q,\alpha)$ を求める必要がある．$S(q,\alpha)$ が得られたとして話を進めよう．このとき，E も積分定数だから，$\alpha_i,\cdots\cdot,\alpha_n$ と独立にとることはできず，それらの関数である．

$$E=E(\alpha_1,\cdots\cdot,\alpha_n) \tag{5.68}$$

式(5.65)，(5.68) を考慮して式(5.63)を書き直すと，

$$p_k=\frac{\partial}{\partial q_k}S(q,\alpha) \tag{5.69a}$$

$$\omega_k t+\beta_k=\frac{\partial}{\partial \alpha_k}S(q,\alpha) \tag{5.69b}$$

ここで，

$$\omega_k\equiv\frac{\partial E}{\partial \alpha_k} \tag{5.70}$$

とおいた．式(5.69b)を q について解いて $q=q(\beta,\alpha,t)$，これを式(5.69a)に入れて $p=p(\beta,\alpha,t)$ が求められることは前と同様である．

関数 $S(q,\alpha)$ の意味を考えよう．前の場合と同じように，定数 α_k を保存されるべき一般運動量 P_k に等置するが，今回は式(5.69b)の左辺を新しい一般座標として導入する．

$$Q_k=\omega_k t+\beta_k, \qquad P_k=\alpha_k \tag{5.71}$$

この変数を使えば式(5.69)は再び式(5.14)にもどる(ただし，後者の W を S と書いておく必要がある)．これは関数 $S(q, \alpha)$ が一つの正準変換の母関数であることを意味するものだ．しかし，S が t を生に含まないので，式(5.14)第3式は $K=H$ を与える．一方，式(5.71)はすべての座標変数 Q が新しいハミルトニアン K に含まれず，循環座標になっていることを意味している．なぜならば，正準方程式，

$$\dot{P}_k=-\frac{\partial K}{\partial Q_k}=0, \qquad \dot{Q}_k=\frac{\partial K}{\partial P_k}=\frac{\partial E}{\partial \alpha_k}=\omega_k \tag{5.72}$$

が式(5.71)を生むからだ．こうして，式(5.65)の関数 S はすべての座標が循環座標であるような系への正準変換を与える母関数であることがわかった．

$S(q, \alpha)$ を時間で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k=\sum_{k=1}^{n}p_k\dot{q}_k \tag{5.73}$$

であり，

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{n}p_k\dot{q}_k\mathrm{d}t=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sum_{k=1}^{n}p_k\mathrm{d}q_k \tag{5.74}$$

が得られるが，これは式(4.25)に登場したものである．

なお，$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ の一つ，例えば，α_1 が E 自身になるように選ぶことができる．すなわち，$K=P_1$ の場合である．このとき，一般座標は，

$$Q_1=t+\beta_1, \qquad Q_k=\beta_k \qquad (k\neq 1) \tag{5.75}$$

であり，式(5.69b)は，

$$t+\beta_1=\frac{\partial}{\partial \alpha_1}S(q, \alpha), \qquad \beta_k=\frac{\partial}{\partial \alpha_k}S(q, \alpha) \qquad (k\neq 1) \tag{5.76}$$

となる．この正準変換によって，時間変数が一般座標に，エネルギーがそれに正準共役な一般運動量になったわけである．これは 5.2節 d項 で述べたことがらの一般化だ．式(5.76)第2式は軌道を決める方程式である．

5.4.2　運動状態の大局的な記述

これまでの運動状態の記述は，多くの場合，個々の質点の座標と運動量をいろいろな初期条件に合せて追跡するというものであった（1.3節を見よ）．これに対してハミルトン-ヤコビの立場では，作用関数 $W(q, \alpha, t)$ または $S(q, \alpha)$ を通して，座標についてのすべての初期条件に対応する運動全体をひとまとめにして眺めるという大局的な記述方法が可能になる．簡単のため，ハミルトニアンが時間を生に含まない場合に話を限ろう．作用関数は $S(q, \alpha)$ である．そこで配位空間において，

$$S(q, \alpha)=C \tag{5.77}$$

という超曲面を描こう．C は定数である．定数 C の値をいろいろ変化させると，地図のように，S の等高面群が定数 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ によって条件づけられた運動可能な配位空間の領域をくまなく覆うはずだ．この等高面群を図5.1のように配位空間内に張りめぐらしておけば便利だ．$C_1, C_2, \cdots$ が定数 C のとった値である．式(5.69a)によれば，運動量は S のこう配として与えられるので，配位空間における質点系の軌跡(流線)はこの面群を垂直に貫く曲線群となる．すなわち，時刻 t_1 に曲面 $S=C_1$ 上の点Aから出発する運動は，その点を通り面群に直交する一つの曲線に沿い，各所各所の S のこう配に等しい運動量をとりつつ行われる．点Aは座標変数初期値の一つの選択を意味するので，曲線群全体はすべての初期値に対応する運動を表す．特に S の値 C を等間隔でとっておくと便利だ．運動量の大きさは二つの等高面の高度差を間隔で割った値に等しいので，面が密集しているところは運動量または速度が大きく，粗い部分ではゆっくりした運動が行われているはずである．このように，ハミルトン-ヤコビの立場では多数の初期値に対応する多くの運動を一括して眺める大局的な記述が可能になる．

S の超曲面と作用関数 W の超曲面，

$$W(q, t)=S(q)-Et=C_0 \tag{5.78}$$

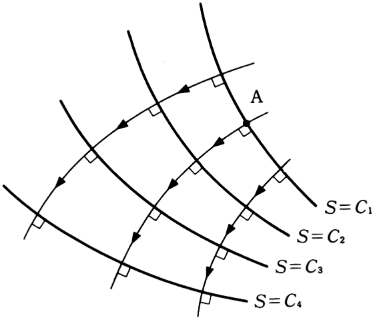


図 5.1 作用関数の等高面と運動の軌跡

を考えよう(式(5.65)を見よ)．S の超曲面は式(5.77)によって決定されるので，$C=C_0+Et$ であり，式(5.78)は運動する面群を表す．図 5.1 の面群が形を変えることなくいっせいに運動しているのが $W=$一定の等高面群である．配位空間における移動の速度 $u=(u_1, \cdots, u_n)$ は，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_k}u_k=E \tag{5.79}$$

によって与えられる．

話を簡単にするため，1 質点の保存系を考えよう．ハミルトニアンは，

$$H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2+V(\boldsymbol{r}) \tag{5.80}$$

であり，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は，

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V(\boldsymbol{r})=E \tag{5.81}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{p}=\nabla S \tag{5.82}$$

面群の移動速度 $\boldsymbol{u}$ は $\nabla S\cdot\boldsymbol{u}=E$ で与えられるが，$\boldsymbol{u}$ と ∇S とは同方向なので $\boldsymbol{u}$ の大きさは，

$$u=|\boldsymbol{u}|=\frac{E}{|\nabla S|}=\frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \tag{5.83}$$

である．面群の動く速さと質点の速さは一致しない．

ハミルトニアンが時間的に変動する場合は式(5.65)は成立せず，$W(q,t)$＝一定の面の運動はこんなに簡単ではなくなる．図5.1のような地図を時間ごとに用意しなければならず，この方法もそれほど便利ではない．

さて，図5.1の流線群と等高面は，幾何光学の射線と波動光学の光波面との関係を連想させる．質点系の軌跡が光の射線に等高面が光の波面に相当する．とすれば，$W(q,t)$＝一定の面は光の定位相面に，作用関数 $W(q,t)$ は位相関数に対応するわけだ．この関係を逆に受け取れば，いま勉強している古典力学は幾何光学相当のものだから，波動光学に対比すべき波動力学があってもよいという発想が出てくる．実際，シュレーディンガーはこのような発想によって**波動力学**を建設した．**量子力学**の発端である．

この対応を数式にして，波動力学の波動関数を，

$$\psi(q,t)\propto\exp\left[\frac{i}{\hbar}W(q,t)\right] \tag{5.84}$$

とおこう．$\hbar$ は作用の次元をもつ新しい普遍定数（プランクの定数）である．式(5.64)を考慮に入れて，式(5.84)を時間について偏微分すれば，

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t)&=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial q_k}\dot{q}_k-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right]\psi(q,t)\\&=\left[\sum_{k=1}^{n}p_k\dot{q}_k-L\right]\psi(q,t)\\&=H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q},t\right)\psi(q,t)\end{aligned}$$

となり，$(\partial W/\partial q)\exp(iW/\hbar)=(\hbar/i)(\partial/\partial q)\exp(iW/\hbar)$ を用いれば，シュレーディンガーの波動方程式，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t)=H\left(q,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q},t\right)\psi(q,t) \tag{5.85}$$

が得られる．量子力学の基礎方程式だ．このように，ハミルト

ン-ヤコビの理論は量子力学の戸口のすぐ前に立っていたのである．なお，この波動の位相速度が式(5.83)であり，群速度が質点の速度に相当する．

5.4.3 簡単な場合

ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式が簡単に解ける場合を見ておこう．

a 1次元運動

1次元運動の場合，変数を q とすれば，ハミルトン-ヤコビの方程式(5.67)に含まれている未知関数は $\mathrm{d}S/\mathrm{d}q$ だけであるから，ただちに，

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}=F(q, E) \tag{5.86}$$

の形に書ける．これを積分して $S(q, E)$ を求めれば，式(5.69)の方法で解が得られる．例えば，$H=(1/2m)p^2+V(q)$ の場合，

$$p=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}=\pm\sqrt{2m(E-V)}, \qquad S=\pm\int^q\sqrt{2m(E-V)}\,\mathrm{d}q \tag{5.87}$$

となり，式(5.69)によって解(1.42)などが出てくる．

b 1個以外がすべて循環座標である場合

一般に，循環座標 q_j に正準共役な正準運動量 p_j は保存されるので，それを定数 α_j とおけば，式(5.69)によって，

$$\alpha_j=\frac{\partial}{\partial q_j}S(q, \alpha) \tag{5.88}$$

である．これを積分すれば，$S=\alpha_j q_j+\bar{S}$ となるが，$\bar{S}$ には q_j は含まれない．したがって，q_1 以外の変数がすべて循環座標である場合は，

$$S(q, \alpha)=\sum_{k=2}^{n}\alpha_k q_k+\bar{S}(q_1; \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{5.89}$$

とおくことができる．このとき，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は，

$$H\left(q_1, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q_1}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\right)=E \tag{5.90}$$

となり，未知関数は $\mathrm{d}S/\mathrm{d}q_1$ だけになってしまった．したがって，a 項の場合と同じように扱うことができる．なお，式(5.89)の第1項は $\sum_k q_k P_k$ の形だから，S は q_2 から q_n までの変数については恒等変換を与える母関数である(5.2節を見よ)．q_1 以外の変数は初めから循環座標だったから，これは当然のことだ．

c　変数分離可能な場合

変数分離可能な場合とは作用関数とハミルトン-ヤコビの方程式(5.67)が，

$$S=\sum_{k=1}^{n} S_k(q_k\,;\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{5.91}$$

$$H_k\left(q_k, \frac{\mathrm{d}S_k}{\mathrm{d}q_k}\,;\alpha_1, \cdots, \alpha_n\right)=\alpha_k \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{5.92}$$

のように分解される場合をいう．式(5.92)は各々が $\mathrm{d}S_k/\mathrm{d}q_k$ だけを未知関数としてもっているので，a 項の場合と同じように，各 S_k を式(5.86)の形にもってくることができる．後はそれを積分して式(5.91)の和をとり，式(5.69)を利用すればよい．b 項はこの場合の特殊例だ．

d　中心力場問題

変数分離可能な場合の具体的問題として中心力場における1個の質点の運動を扱ってみよう．周知のように，軌道角運動量が保存されるために運動は1平面内に局限され，2次元問題として処理することができる．しかし，ここでは本来の3次元問題として扱いたい．中心力場なので，球座標(r, θ, ϕ)を使うと便利だ．

$$x=r\sin\theta\cos\phi, \quad y=\sin\theta\sin\phi, \quad z=\cos\theta \tag{5.93}$$

(x, y, z) はもちろん直角座標．球座標でラグランジアンを書けば，

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)-V(r) \tag{5.94}$$

であり，公式に従って正準運動量とハミルトニアンをつくれば，

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\theta=mr^2\dot{\theta},\quad p_\phi=mr^2\sin^2\theta\ \dot{\phi} \tag{5.95}$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r{}^2+\frac{p_\theta{}^2}{r^2}+\frac{p_\phi{}^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r) \tag{5.96}$$

となる．一方，軌道角運動量の大きさの2乗を球座標で表せば，

$$L^2=L_x{}^2+L_y{}^2+L_z{}^2=p_\theta{}^2+\frac{p_\phi{}^2}{\sin^2\theta} \tag{5.97}$$

である．もちろん，L は保存される．これを使えばハミルトニアン(5.96)は，

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r{}^2+\frac{L^2}{r^2}\right)+V(r) \tag{5.98}$$

となる．これは見慣れた形だ．運動平面に極座標（r, θ'）をとれば，$L=p_{\theta'}$ であることはいうまでもない．

ハミルトニアン(5.96)が与えるハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は，

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right]+V(r)=E \tag{5.99}$$

である．そこで，式(5.91)にならって，

$$S(r,\theta,\phi)=S_r(r)+S_\theta(\theta)+S_\phi(\phi) \tag{5.100}$$

とおいてみよう．すなわち，

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r},\qquad \frac{\partial S}{\partial \theta}=\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta},\qquad \frac{\partial S}{\partial \phi}=\frac{\mathrm{d}S_\phi}{\mathrm{d}\phi}$$

であり，これを式(5.99)に入れれば，

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}S_r}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\mathrm{d}S_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right]+V(r)=E \tag{5.101}$$

が得られる．変数 ϕ は明らかに循環座標である．したがって，ϕ の共役運動量は保存されるので，その値を α_ϕ とすれば，

$$S_\phi = \alpha_\phi \phi \qquad (5.102a)$$

とおくことができる．これを式(5.101)に代入すれば，

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi{}^2}{r^2\sin^2\theta}\right] + V(r) = E \qquad (5.103)$$

が得られる．この式をよく見ると，さらに，

$$\left(\frac{dS_\theta}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi{}^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta{}^2 \qquad (5.102b)$$

とおけば，式(5.103)が，

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta{}^2}{r^2}\right] + V(r) = E \qquad (5.102c)$$

となることがわかる．これで変数分離が完成した．式(5.102a)～(5.102c)はそれぞれ ϕ, θ, r だけを含む方程式であり，まさに式(5.92)の形になったからである．α_ϕ は p_ϕ の値であり，α_θ は角運動量の大きさ L であり，いずれも保存量であった．これは中心力場問題の回転対称性による．変数分離の成功もこの対称性のおかげであり，そのため (θ, ϕ) 部分が r 部分から切り離されたのである．直角座標を使っていたのではこうはならない．対称性の把握が重要である理由だ．

さて，式(5.102c)から，

$$p_r = \frac{dS_r}{dr} = \pm\sqrt{2m\left(E - V(r) - \frac{\alpha_\theta{}^2}{2mr^2}\right)}$$

これを積分して，

$$S_r = \pm\int^r \sqrt{2m\left(E - V(r) - \frac{\alpha_\theta{}^2}{2mr^2}\right)}\,dr \qquad (5.104)$$

が得られる．式(5.102c)は運動平面上の2次元問題に等価であり，運動平面上の極座標 (r, θ') で記述すれば（b項の場合になり），作用関数は，

$$S(r, \theta'; \alpha_\theta, E) = \alpha_\theta\theta' + \bar{S}_r(r; \alpha_\theta, E) \qquad (5.105)$$

とおくことができる．この $\bar{S}_r$ は式(5.102c)の S_r に等しく，式(5.69)または式(5.76)が解を与える．すなわち，

$$t-t_0=\frac{\partial S_r}{\partial E}=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r)-\alpha_\theta{}^2/2mr^2)}} \tag{5.106a}$$

$$\theta'-\theta_0=\frac{\partial S_r}{\partial\alpha_\theta}=\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\alpha_\theta\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m(E-V(r)-\alpha_\theta{}^2/2mr^2)}} \tag{5.106b}$$

(r_θ, θ_0) は 時刻t_0 における初期値である．式(5.106a)は r の t 依存性を，式(5.106b)は軌道を与える．すでに，1.3.3項で見たところだ．

5.5 ハミルトン-ヤコビの理論と周期運動

保存力による周期運動だけを取り上げる．すなわち，ハミルトニアンが時間を生に含まない場合である．さらに，前節の意味での変数分離可能な場合に限ろう．

5.5.1 作用変数と角変数

まず，簡単のため，1次元周期運動を取り上げる．相空間は正準変数 (q, p) を直角座標としてもつ2次元平面である．2.2.2項の単振子の場合に見たように，周期運動には振動型と回転型の2種類がある．振動型は相空間の軌跡が閉曲線を描く場合であり，周期は代表点がその閉曲線を1周する時間だ．回転型の場合，軌跡は波形になるが，その波の最も近い二つの同位相点間を通過する時間が周期である．

さて，正準変換 $(q, p)\to(Q, P)$ によって，新変数 Q が循環変数になったとしよう．ハミルトニアン $K=H$ は P だけの関数になり，Q には依存しない．この場合，P は一定となり，その正準変換の母関数は，

$$S=\int^q p(q, P)\,\mathrm{d}q \tag{5.107}$$

で与えられ(式(5.74)参照)，

$$p=\frac{\partial}{\partial q}S(q, P) \tag{5.108a}$$

$$Q=\omega t+\beta=\frac{\partial}{\partial P}S(q, P) \tag{5.108b}$$

$$\omega=\frac{\partial H}{\partial P} \tag{5.108c}$$

が成立する(式(5.69)および式(5.70)参照).

この運動の周期を T として式(5.108b)によって $Q(t+T)-Q(t)=\omega T$ をつくれば，次式が得られる．

$$\omega T=\frac{\partial}{\partial P}\oint p(q, P)\,\mathrm{d}q \tag{5.109}$$

しかし，まだ P の選び方については何の特定もしていない．このままでは ω の意味は確定しない．そこで，$\omega\equiv 2\pi\nu$ が角振動数(したがって，ν が振動数)という意味をもつように P を選ぼう．ω が角振動数であるための条件は，

$$\omega T=2\pi \qquad \text{または} \qquad \nu T=1 \tag{5.110}$$

だ．これが成立するためには，P が，

$$J\equiv\frac{1}{2\pi}\oint p(q, P)\,\mathrm{d}q \tag{5.111}$$

であればよい．すなわち，$P=J$ であればよい．式(5.111)を式(5.109)に入れれば，式(5.110)が出てくるからである．この場合，新しい一般座標として，

$$w=\omega t+\beta=\frac{\partial}{\partial J}S(q, J) \tag{5.112}$$

をとったことになっている．J はそれに正準共役な運動量だ．ハミルトニアンは $K=H(J)$ であり，w は循環座標となって J は保存される．w を**角変数**，J を**作用変数**という．角変数命名の由来は1周期ごとに $\Delta w=\omega T=2\pi$ だけ増加するからである．なお，式(5.108c)は，

$$\omega=\frac{\partial H}{\partial J} \qquad \text{または} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial H}{\partial J} \tag{5.113}$$

となる．

1次元調和振動子の場合，5.2節d項および5.3節の式(5.51)によれば，

$$J=\frac{E}{\omega} \tag{5.114}$$

である．この場合，E と ω は比例関係にあるので式(5.113)の微分は単に比となった．ボーアが始めた前期量子論は，作用変数を，

$$J_n=n\hbar \qquad \text{または} \qquad \oint p(q,E_n)\mathrm{d}q=nh$$
$$(n=0,1,2,\cdots\cdot) \tag{5.115}$$

とおいて，エネルギー準位 E_n を与える**量子条件**として設定した．$\hbar=h/2\pi$ と h はともにプランクの定数とよばれている．波動力学を導入したところの式(5.84)でも出てきた普遍定数である．n を**量子数**という．量子条件を調和振動子の作用変数(5.114)に適用すれば，プランクの量子仮説，

$$E_n=nh\nu \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdot) \tag{5.116}$$

が現れる．一般の場合，式(5.113)第1式を対応論的に解釈して $\Delta J=\hbar$ とおけば，量子遷移 $n\to n'$ によって放出・吸収される光の振動数に対する式 $\hbar\omega=|E_n-E_{n'}|$ も出てくる．ここでもハミルトン-ヤコビの理論が量子論へのジャンプ台であったことを見たわけだ．後で，直接の踏台になった作用変数が断熱不変量であることを示す予定である．

独立な自由度 n をもつ力学系の問題にもどろう．ただし，母関数 S が式(5.91)のような和に分解される変数分離可能な場合に限る．q_k だけの関数である各項 S_k は独立に式(5.92)を満足し，運動量は $p_k=\mathrm{d}S_k/\mathrm{d}q_k$ で与えられる．要するに，独立な1次元問題が n 個あると考えてよい．したがって，相空間も番号ごとに (q_k, p_k) のつくる2次元平面となる．この部分相空間の中で軌跡が1次元周期運動の形になれば，上に述べた1次元周期運動の理論的取扱いをそのままもち込むことができる．すべての変数の運動が周期的である場合，作用変数を，

$$J_k=\frac{1}{2\pi}\oint p_k(q_k\,;\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mathrm{d}q_k \qquad (k=1,\cdots,n) \qquad (5.117)$$

によって定義しよう．J_k は $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の関数であるが，逆に解いて α_k を $J_1,\cdots,J_n$ で表せば，ハミルトニアンも $J_1,\cdots,J_n$ だけの関数になり，$H=H(J_1,\cdots,J_n)$ となる．J_k と正準共役の関係にある角変数は式(5.112)と同じように，

$$w_k=\omega_k t+\beta_k=\frac{\partial S}{\partial J_k}; \qquad \omega_k=\frac{\partial H}{\partial J_k} \qquad (5.118)$$

で与えられる．

さて，特定番号 j の変数 q_j を1周期だけ変化させたときの変数 w_k の変化 $\Delta_j w_k$ を求めてみよう．微小変化については $\mathrm{d}w_k=(\partial w_k/\partial q_j)\,\mathrm{d}q_j$ だから，

$$\Delta_j w_k=\oint\frac{\partial w_k}{\partial q_k}\mathrm{d}q_j=\oint\frac{\partial^2 S}{\partial q_j\partial J_k}\mathrm{d}q_j=\frac{\partial}{\partial J_k}\oint\frac{\partial S_j}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j$$

$$=\frac{\partial}{\partial J_k}\oint p_j\mathrm{d}q_j=2\pi\frac{\partial J_j}{\partial J_k}=2\pi\delta_{jk} \qquad (5.119)$$

となるわけだ．すなわち，w_j は2π だけ変化するが，$w_k(k\neq j)$ は元の値にもどる．ゆえに，変数 q_j の周期を T_j とすれば，

$$\omega_j T_j=2\pi \qquad \text{または} \qquad \nu_j T_j=1 \qquad (5.120)$$

が成立し，ω_k に角振動数(ν_k に振動数)という意味が付けられる．他の座標の変化についてもまったく同様である．したがって，座標 $q_k(k=1,\cdots,n)$ の時間的変動は ω_k を周期とするフーリエ級数，

$$q_k(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\xi_{k,l}\exp[il(\omega_k t+\beta_k)] \qquad (5.121)$$

によって表すことができる．ただし，$\xi_{k,l}{}^*=\xi_{k,-l}$．もっとも，式(5.121)は振動型の場合だ．回転型の場合，対応する部分相空間の軌跡は波形となって元の値にもどらず，周期ごとに一定距離 Δq_k だけずれる．しかし，それ以外の部分は周期ごとに元の値にもどる．ゆえに，この場合は式(5.121)の左辺を $q_k-(w_k/2\pi)\Delta q_k$ でおき換えておけばよい．

式(5.121)は ω_k をただ一つの基本振動数としてもつフーリエ級数であった．これは変数分離可能な場合の特徴だ．しかし，この場合でも，いくつかの q_k の関数である力学量は数個の基本振動数を含み，単純な周期運動にはならない．そのような力学量を $F(q, p)$ とすれば，一般には，すべての振動数 $\omega_1, \cdots\cdot, \omega_n$ をもつ多次元フーリエ級数，

$$F(q, p)=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\cdot\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\Xi_{l_1,\cdots,l_n}\exp[i(l_1\omega_1+\cdots\cdot+l_n\omega_n)t+i(l_1\beta_1+\cdots\cdot+l_n\beta_n)] \tag{5.122}$$

によって表される．このような変動を**多重周期運動**という．いま，すべての振動数 $\omega_1, \cdots\cdot, \omega_n$ の比が整数の比になるとき，すなわち，適当な整数の組 $g_1, \cdots\cdot, g_n$ を選んで，

$$g_1\omega_1+\cdots\cdot+g_n\omega_n=0 \tag{5.123}$$

が成立するような場合，$F(q, p)$ は各周期の最小公倍数を周期とする単純周期運動を行う．この関係式が成立しないとき，すなわち，各周期の比が無理数になるとき，$F(q, p)$ が完全に元の値にもどることは決してない．しかし，元の値にいくらでも接近しうる．一種の疑似周期運動だ．実際，無理数は任意の精度で有理数によって近似されることを考慮すれば，$\omega_1, \cdots\cdot, \omega_n$ は式(5.123)を満足する有理数の組 $\omega_1', \cdots\cdot, \omega_n'$ でおき換えられるはずである．後者の組の最小公倍数がその疑似周期になる．疑似周期運動の場合，$F(q, p)$ のとる値は疑似周期ごとに少しずつずれて行き，相空間上でとりうるあらゆる値が実現することがある．このような状況の実現を期待して，長時間平均を相空間平均に等置しようとするエルゴード定理，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(q, p)\mathrm{d}t=\frac{\iint F(q, p)\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p} \tag{5.124}$$

が設定される．統計力学の基礎となる考えだ．ただし，証明は難しい．相空間の確率分布については，改めて6章で議論する

予定である．なお，相空間上の軌跡がランダムに分布するような状況を**カオス**という．最近カオスの研究はたいそう進歩した．ここでは残念ながら紹介している余裕はない．

式(5.123)のような関係式がいくつか(例えば，h 個)あるとき，多量周期運動は h 重に**縮退**しているという．その場合，h 個の振動数は他の $(n-h)$ 個の振動数で表すことができるので，実質的には $(n-h)$ 重の周期運動に縮小してしまう．$h=n-1$ のときは完全に縮退しているという．なお，h 重に縮退している場合，h 個の角変数を時間的に一定になるように選ぶことができるが，これ以上の議論はやめよう．

5.5.2 断熱不変量

一つの力学系の運動状態に外から影響を与えるとき，その力学系に固有な時間（上記の周期運動の場合では周期）内ではごくわずかな変動しか生じないようなゆっくりした変化を**断熱変化**という．これに対して，その時間内で激しい変動を引き起すようなものを**急激変化**という．断熱変化では運動状態はその概形を保ちながらゆっくりと変るが，急激変化では運動形態そのものが基本的に破壊される．断熱変化の場合，一定に保たれる量があり，それを**断熱不変量**とよぶ．ここでは作用変数が断熱不変量であることを示そう．

通常，断熱変化は外力に含まれているパラメーターのゆっくりした時間的変化によって引き起される．よく知られている例は単振子の運動の断熱変化である．例えば，糸の長さを振動の周期内での変化がほとんど無視できるほどゆっくりと短くして行くと，振動全体は振動数を次第に大きく（周期を次第に短く）しながらも概形は保たれる．しかし，糸を短くする作業は重力に抗して外力が行うわけだから，単振子のエネルギーは変化する．小振幅の振動の場合に局限して，具体的にこの変動を解析してみよう．座標系は図1.15のように設定すればよいが，小振幅のため $\sin\theta\simeq\theta$ と近似し，x 軸方向の変位 $x=r_0\theta$

の運動を見る(r_0は糸の長さ). いうまでもなく, 運動方程式は $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ であり ($\omega^2=(g/r_0)$; g は重力の加速度), 解は $x(t)=x_0\cos\omega t$ と $p(t)=-m\omega x_0\sin\omega t$ (初期値を $x(0)=x_0$, $p(0)=0$ と選んだ), エネルギーは,

$$E=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 \tag{5.125}$$

である. r_0 をゆっくり変える断熱変化では $x(t)$, $p(t)$, E はこの形のままで, ω がゆっくり変化するとしてよい. そこで, t と $t+\delta t$ の間のエネルギーの値の変化を計算すると,

$$\delta E\equiv E_{t+\delta t}-E_t=\left(\frac{p}{m}\dot{p}+m\omega^2x\dot{x}\right)\delta t+m\omega x^2\delta\omega=m\omega x^2\delta\omega \tag{5.126}$$

となる. ただし, (　　) 内が運動方程式によってゼロになることを用いた. この両辺を1周期 ($T=2\pi/\omega$) について時間平均すれば, 断熱変化のため δE, $\delta\omega$, ω の変化は無視できて, x^2 の平均は $(x_0{}^2/2)$ になり,

$$\delta E=\frac{1}{2}m\omega^2x_0{}^2\frac{\delta\omega}{\omega}=E\frac{\delta\omega}{\omega}, \qquad \therefore\frac{\delta E}{E}=\frac{\delta\omega}{\omega} \tag{5.127}$$

が得られる. これは $J=E/\omega$ が r_0 (すなわち ω)のゆっくりした変化に際して一定であることを示している. なぜならば,

$$\frac{E_{t+\delta t}}{\omega_{t+\delta t}}=\frac{E+\delta E}{\omega+\delta\omega}=\frac{E}{\omega}\left(1+\frac{\delta E}{E}-\frac{\delta\omega}{\omega}\right)=\frac{E}{\omega} \tag{5.128}$$

だからだ. すなわち, 作用変数は断熱不変量である.

この証明を一般の1次元周期運動に拡張することはそれほど難しくない. ポテンシャルが断熱変化させるべきパラメーター λ に依存しているとしよう. エネルギーの式 $E=(1/2m)p^2+V(x,\lambda)$ から式(5.126)と同様の推論によって,

$$\delta E=\delta_\lambda V(x,\lambda) \tag{5.129}$$

が得られる. δ_λ はパラメーター λ による変化分を示す. 一方, 作用変数 J の式は, 式(5.111)に $p=\sqrt{2m(E-V(x,\lambda))}$ を代

入したものである．断熱変化による微小変化は，λ を固定した運動による変化と運動を固定した λ による変化に分けることができる．J は保存量だから，前者の変化はない．したがって，パラメーター λ の微小変動による作用変数 J の断熱変化は，

$$\delta_\lambda J=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\sqrt{2m}(\delta E-\delta_\lambda V)}{2\sqrt{E-V}}\,\mathrm{d}x \tag{5.130}$$

であるが，これは式(5.129)によってゼロとなる．ゆえに，作用変数は断熱不変量である．

5.5.1項では，作用変数を踏台にした量子条件(5.115)について述べた．作用変数が断熱不変だとすれば，ジャンプした先の量子力学，特に波動力学ではどうなっているか？　式(5.84)に従えば，波動関数は $\psi\propto\exp(iW/\hbar)$ である．保存系では $W=S-Et$ （式(5.65)を見よ）であり，特に $V=0$ の場合，$W=px-Et$ となる．ただし，$p=$ 一定．この波動が幅 a の区間 $(0, a)$ に閉じ込められているときは，定在波 $\psi(x, t)\propto\sin(px/\hbar)\exp(-iEt/\hbar)$ が実現し，両端がゼロになるという境界条件によって，運動量の値は $p/\hbar=n\pi/a\ (n=1, 2, \cdots\cdot)$ に制限される．この整数 n は定在波の“節”の個数 $(n-1)$ を与えるが，前期量子論の量子数 n に対応するものである．“節”によって示される定在波のモードはやはり断熱不変である．すなわち，外力によってパラメーター（この場合は区間幅 a）をゆっくり増減させても，“節”の個数は変らない．古典力学と量子力学は断熱不変量を通してつながっていたのである．量子論発展の初期，断熱不変量が重要視された理由はそこにあった．

5.5.3　中心力場と作用変数

中心力場における1質点の周期運動を取り上げよう．5.4節では，球座標 (r, θ, ϕ) についてハミルトン-ヤコビの偏微分方程式が変数分離型になることを示した．ここでは，その各変数

に対して作用変数を導入して，問題を解いて行きたい．各作用変数が，

$$J_\phi=\frac{1}{2\pi}\oint\alpha_\phi \mathrm{d}\phi=\alpha_\phi \tag{5.131a}$$

$$J_\theta=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{\alpha_\theta{}^2-\frac{\alpha_\phi{}^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta \tag{5.131b}$$

$$J_r=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\left[E-\frac{\alpha_\theta{}^2}{2mr^2}-V(r)\right]}\mathrm{d}r \tag{5.131c}$$

によって定義されることは 5.5.1 項の議論から明らかだろう．被積分関数はそれぞれ p_ϕ，p_θ，p_r である．

$J_\phi=\alpha_\phi$ は ϕ に共役な運動量だから一定であり，ϕ は J_ϕ に共役な角変数になるので 1 周期ごとに 2π だけ変化する．θ についてはは事情はそれほど簡単ではない．式(5.131b)を直接積分するのは少々面倒だ．しかし，よい方法がある．私たちは中心力場では軌道角運動量が保存され，運動が 1 平面に限られることを知っているからだ．その平面上で極座標(r, θ')をとれば，θ' が循環座標になり周期ごとに 2π だけ変る．θ' に正準共役な運動量 $p_{\theta'}$ は全角運動量を表すことは明らかだ．したがって，式(5.97)によって，

$$p_\theta{}^2+\frac{p_\phi{}^2}{\sin^2\theta}=p_{\theta'}{}^2$$

とおいてよい．これは，

$$p_\theta\dot{\theta}+p_\phi\dot{\phi}=p_{\theta'}\dot{\theta}'$$

を意味するものだ．両辺を時間について 1 周期積分し，$p_\phi=\alpha_\phi$ と $p_{\theta'}=\alpha_\theta$ が一定であることと，ϕ と θ' が 1 周期ごとに 2π だけ変化することを使えば，ただちに，

$$J_\theta=\frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\,\mathrm{d}\theta=\alpha_\theta-\alpha_\phi, \qquad \therefore\quad \alpha_\theta=J_\theta+J_\phi \tag{5.132}$$

が得られる．これを式(5.131c)に代入すれば，J_r の積分式，

$$J_r=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\left[E-\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{2mr^2}-V(r)\right]}\mathrm{d}r \tag{5.133}$$

が出てくる．

さて，具体的に問題を解くにはこの積分を実行しなければならない．周期運動が存在するためには，ポテンシャルとエネルギーは図 1.13 のような状況にある必要がある（1.3.3 項とは記法が少々違う．$\mu\to m$，$l\to(J_\theta+J_\phi)$）．周期運動は近日点 r_2 と遠日点 r_4 の間（$r_2<r_4$）で行われるので，式(5.133)の積分は，

$$J_r=\frac{1}{2\pi}\int_{r_2}^{r_4}\sqrt{2m\left[E-\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{2mr^2}-V(r)\right]}\,\mathrm{d}r$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{r_4}^{r_2}\sqrt{2m\left[E-\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{2mr^2}-V(r)\right]}\,\mathrm{d}r \qquad (5.134)$$

と書くことができる．ただし，近日点と遠日点(r_2, r_4)が方程式，

$$2mE-\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{r^2}-2mV(r)=0$$

の根であることはいうまでもない（1.3.3 項参照）．

クーロン型のポテンシャル，例えば，水素原子における陽子と電子の間の静電引力のポテンシャル，

$$V(r)=-\frac{e^2}{r} \qquad (5.135)$$

を式(5.134)に入れて積分を実行すると，

$$J_r=-(J_\theta+J_\phi)+\frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{2m}{-E}} \qquad (5.136)$$

となる(簡単のため，$4\pi\varepsilon_0=1$ という単位系を用いた．ε_0 は真空の誘電率である)．これで問題が解けたわけだ．エネルギー E に対する解は，

$$E=-\frac{me^4}{2(J_r+J_\theta+J_\phi)^2} \qquad (5.137)$$

のように作用変数の関数として得られる．この式は J_r, J_θ, J_ϕ について完全に対称な形をしていることに注意していただきたい．そのため，各変数に関する振動数は，

$$\omega=\frac{\partial E}{\partial J_r}=\frac{\partial E}{\partial J_\theta}=\frac{\partial E}{\partial J_\phi}=\frac{me^4}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^3} \tag{5.138}$$

となり，すべてが等しくなる．完全に縮退した周期運動である．なお，これを周期に書き直すとクーロン型ポテンシャル特有の法則，

$$T=2\pi e^2\sqrt{\frac{m}{(-2E)^3}} \tag{5.139}$$

が導かれる．なお，M を太陽の質量，m を地球の質量，G を万有引力の定数としておき換え $e^2\to GMm$ を実行すると，この問題は太陽のまわりの地球の運動に移行する．そのとき式(5.139)はケプラーの第3法則を表す．

量子条件(5.115)を上記の作用変数に適用して，$J_r=n_r\hbar$, $J_\theta=n_\theta\hbar$，$J_\phi=n_\phi\hbar$ とおき（n_r, n_θ, n_ϕ は正整数），さらに正整数 $n=n_r+n_\theta+n_\phi$ を使えば $J_r+J_\theta+J_\phi=n\hbar$ となるので，式(5.137)から水素原子の量子論的なエネルギー準位，

$$E_n=-\frac{me^4}{2n^2\hbar^2} \qquad (n=1,2,\cdots\cdot) \tag{5.140}$$

が得られる．前期量子論が初めて与えた正しいエネルギー準位である．

さて，式(5.137)にもどろう．J_r, J_θ, J_ϕ についての完全な対称性はクーロン型ポテンシャルの特徴である．回転不変性（または球対称性）だけでは，式(5.132)および式(5.133)で見られるように角度部分についての対称性，すなわち，J_θ と J_ϕ とについての対称性しかない．J_r, J_θ, J_ϕ 全部についての対称性は，クーロン場内の運動には，回転対称性以上の高度な対称性があることを意味しているのである．新しい不変性や対称性が存在すれば，それに対応して新しい保存量がなければならない．実際，クーロン場内の運動では，**ルンゲ-レンツのベクトル**，

$$\boldsymbol{A}=\sqrt{\frac{m}{-2E}}\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}+e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{5.141}$$

が一定に保たれることは古くから知られている．証明は簡単である．右辺を時間微分し，クーロン場内の運動方程式 $\dot{\boldsymbol{L}}=0$, $\dot{\boldsymbol{p}}=-(e^2/r^2)(\boldsymbol{r}/r)$, $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{p}/m$ を用いればよい．このベクトルが保存量になることを利用して，クーロン場内の運動を解析する方法もある．

問　　題

5.1 ラグランジュかっこ式の正準変換不変性(5.46)を証明せよ．

5.2 質量 m の質点の運動に対するガリレイ変換 $(x, y, z)\to(X=x-ut, Y=y, Z=z)$（$u$ は一定）および対応する運動量の変換 $(p_x, p_y, p_z)\to(P_x=p_x-mu, P_y=p_y, P_z=p_z)$ を与える正準変換の母関数を求めよ．

5.3 地表上の一様な重力場（重力の加速度 g）における質量 m の質点の自由落下運動がある．静止した座標系の x 軸を鉛直線に沿ってとり，その上の1次元問題として扱う．ハミルトニアンはもちろん $H(x, p)=(1/2m)p^2+mgx$ だ．母関数 $W(x, P, t)=(x+u(t))P+xv(t)+w(t)$ による正準変換 $(x, p)\to(X, P)$ を行って，静止座標系から質点が自由粒子に見える座標系（自由落下系）に移りたい．すなわち，変換後のハミルトニアンが $K=H+(\partial W/\partial t)=(1/2m)P^2$ となるように $u(t), v(t), w(t)$ を決定せよ．

5.4 ラグランジアン $L=(m/2)\dot{x}^2-V(x)$ の1次元運動をハミルトン-ヤコビの偏微分方程式によって議論せよ．ただし，ポテンシャルは次のように選べ．

(a)　$V(x)=(1/2)Kx^2$.

(b)　$|x|>L/2$ に対して $V(x)=\infty$，$|x|<L/2$ に対して $V(x)=0$.

(c)　1章の問題1.6で与えた $V(x)$.

(d)　$V(x)=mgx$.

ただし，m, g, K, L は正数．

5.5 質量 m の質点の中心力場における運動のハミルトン-ヤコビの

偏微分方程式が，積分形の解(5.106)，(5.134)をもつことはすでに5.4節d項と5.5.3項で説明した．周期解（$E<0$）の式(5.134)にクーロン場(5.135)を入れ，具体的に積分して式(5.136)を導け．

5.6 母関数 $S=(w_\phi-w_\theta)J_1+(w_\theta-w_r)J_2+w_rJ_3$ によって，正準変数を（$w_r, w_\theta, w_\phi ; J_r, J_\theta, J_\phi$）から（$w_1, w_2, w_3 ; J_1, J_2, J_3$）に正準変換すると，$J_1=J_\phi$，$J_2=J_\theta+J_\phi$，$J_3=J_r+J_\theta+J_\phi$ となることを証明せよ．式(5.137)は $E=-(me^4/2J_3^2)$ となり，エネルギー E は J_3 だけで書くことができる．なお，w_1, w_2, w_3 の時間的変化を調べよ．

5.7 q_k が循環座標であるとき，有効ラグランジアンは $\tilde{L}=L-p_k\dot{q}_k$ であった(2章問題)．これに対応して作用積分は $S=\tilde{S}+\alpha_kq_k$ となる．α_k は保存量 p_k のとる値(一定)である．$\tilde{S}$ はq_k を含まない．対称コマのラグランジアンは式(3.187)であるが，オイラー角ϕ, ψ は循環座標だ．したがって，$S=\alpha_\phi\phi+\alpha_\psi\psi+\tilde{S}(\theta)$ とおくことができ，ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は変数分離型となって，θ だけの関数 $\tilde{S}(\theta)$ の方程式が導かれる．この方程式で対称コマの運動を議論せよ．

5.8 力学量が有限の値をとるように制限されている場合（力学系が固定力によって束縛されているか，または有限の大きさの箱に入れられている場合)，長時間平均 $\langle\cdots\cdot\rangle$（式(5.124)の左辺)に対して**ビリアル定理**，

$$2\langle T\rangle=\sum_{i=1}^{N}\langle \boldsymbol{r}_{(i)}\cdot\nabla_{(i)}V\rangle$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，力学系のハミルトニアンは $H=T+V$ であるとした．$T=\sum_i(1/2m_i)\boldsymbol{p}_{(i)}{}^2$ は運動エネルギー，V はポテンシャルエネルギーで $\boldsymbol{r}_{(i)}$ だけの関数．$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\sum_i\boldsymbol{r}_{(i)}\cdot\boldsymbol{p}_{(i)}$ の長時間平均がゼロとなること，および運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}}_{(i)}=-\nabla_{(i)}V$ を利用すればよい．

5.9 前問のビリアル定理においてポテンシャル V が K 次の同次関数の場合，$2\langle T\rangle=K\langle V\rangle$が成立することを証明せよ．これを

使って，(a) 微小振動(3.12)の場合に$\langle T\rangle=\langle V\rangle$，(b) クーロン場による束縛状態（だ円軌道）に対して $2\langle T\rangle=-\langle V\rangle$となることを示せ．

6　相空間分布関数

前章では，作用関数 $S(q,\alpha)$ がその等高面群によって配位空間内の運動全体を大局的に記述するありさまを見た．この方式は配位空間内に設定されるすべての初期条件に対応するものであった．しかし，その初期条件は配位空間上での一般座標 $q=(q_1,\cdots\cdot,q_n)$ の指定であって，一般運動量 $p=(p_1,\cdots\cdot,p_n)$ に対するものではない．$S(q,\alpha)$ に含まれる定数 α は，この作用関数を母関数とする正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ が与える保存量 P の値を指定するものである．すなわち，保存量 P の指定によって限定された配位空間内の運動の大局的記述であった．変数 p の値は S のこう配を計算して初めてわかるものだ．ハミルトン-ヤコビの理論が有用であるとしても，正準変数 (q,p) を同列において，それらすべての初期条件に対応する運動全体の大局的記述はないものか？　この希望をかなえてくれるものが**相空間分布関数**である．相空間分布関数は統計力学，特に動力学的な統計力学の分野に重要な概念と道具を提供してくれる．ここでは，まず相空間分布関数を定義し，それが満足するリウビルの方程式を導き，相空間分布関数の一般的性格と役割について説明する．

6.1　相空間分布関数とリウビルの方程式

すでに，1.3節と2.2節で学んだように，正準変数 (q, p) を直角座標軸としてもつ $2n$ 次元相空間内の1点と質点系の一つの運動状態の間には1対1対応がある．その意味で相空間内の点を力学系の代表点といった．相空間内の代表点がつくる一つの流線は一つの初期条件から始まる質点系の運動を表すものである．別の流線は異なる初期条件による運動に対応する．相空間内の領域は相異なる初期条件に属する運動の代表点の集りであることを考慮して，相空間に確率概念を導入しよう．すなわち，相空間のある領域内に代表点を見いだす確率を設定し，その確率の密度関数として相空間分布関数を定義するのである．

なぜこんなことをするのか？　もちろん，一つは冒頭に述べたように相空間における大局的記述がほしいからである．しかし，それだけではない．例として，マクロ物体に含まれるきわめて多数のミクロ粒子の運動を考えよう．これは惑星や人工衛星または大砲の弾など少数の（質点と考えてよい）物体の運動とは取扱いの方法が違う．後者の場合はかなりよい精度で初期条件を決めることができるので，相空間内の1本の流線を追跡すれば十分である．しかし，前者の場合，例えば気体分子の運動を議論する場合は，アボガドロ数 $(\simeq 6\times 10^{23})$ ほどの数の粒子の初期位置や初速度を一つひとつ正確に知ることはまず不可能だろう．私たちが獲得できる知識は“平均値”と“ゆらぎ”ぐらいである．平均値とゆらぎの背景には確率概念がある．初期条件の正確な指定は相空間内の1点を正確に決定するが，平均値とゆらぎによる（いわば不完全な）指定は代表点が相空間内のある領域に存在することを確率によっていうだけだ．この場合に確率の導入が重要な意味をもってくるのである．

いま，時刻 t のとき代表点が相空間内の領域 Ω に存在することの確率を $P_t(\Omega)$ としよう．確率関数 $P_t(\Omega)$ が満足すべき

性質は次の通りである．空集合を $\Omega=0$，相空間全体の点集合を $\Omega=\infty$ と書くことにすれば，

$$P_t(0)=0, \qquad P_t(\infty)=1 \tag{6.1 a}$$

であり，$P_t(\Omega)$ は Ω の増大とともに単調増加して 0 から 1 に至る正値関数だ．さらに，Ω_1 と Ω_2 が共通部分をもたない 2 個の領域である場合（$\Omega_1 \cap \Omega_2=0$）と，領域 Ω が領域 Ω' を含む場合（$\Omega \geqq \Omega'$）に対しては，

$$P_t(\Omega_1 \cup \Omega_2)=P_t(\Omega_1)+P_t(\Omega_2) \qquad (\Omega_1 \cap \Omega_2=0) \tag{6.1 b}$$

$$P_t(\Omega) \geqq P_t(\Omega') \qquad (\Omega \geqq \Omega') \tag{6.1 c}$$

という性質がある．相空間内の 1 点 (q, p)（詳しくは $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$）を含む微小領域 $\mathrm{d}\Omega(q, p)$ をとれば，時刻 t のときその中に代表点が存在する確率 $P_t(\mathrm{d}\Omega(q, p))$ はその領域の微小体積 $\prod_k \mathrm{d}q_k \mathrm{d}p_k$ に比例するだろう．すなわち，

$$P_t(\mathrm{d}\Omega(q, p))=f(q, p, t)\prod_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k \tag{6.2}$$

この比例係数 $f(q, p, t)$ を**相空間分布関数**という．確率 $P_t(\mathrm{d}\Omega)$ と同じく，相空間分布関数 $f(q, p, t)$ も負にはならない．式 (6.2) は $f(q, p, t)$ が確率分布の密度関数であることを意味している．したがって，

$$P_t(\Omega)=\int\cdots\int_{\Omega} f(q, p, t)\prod_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k \tag{6.3}$$

である．また，任意の力学量 $F(q, p, t)$ の平均値は，

$$\langle F\rangle_t=\frac{1}{P_t(\infty)}\int\cdots\int_{\infty} F(q, p, t)f(q, p, t)\prod_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k \tag{6.4}$$

によって計算することができる．積分内の (q, p) は単なる積分変数であって，時間とともに変動する力学変数 $(q(t), p(t))$ ではない．この場合，力学系の時間的発展を記述するものは相空間分布関数 $f(q, p, t)$ の変動であって，力学変数 (q, p) の方ではないことを注意しておこう．

さて，式 (6.3) の積分領域を全相空間 ($\Omega=\infty$) にとろう．このとき左辺は $P_t(\infty)$ に移行し，式 (6.1 a) 第 2 式が成立するが，これは $f(q,p,t)$ に対する規格化条件，

$$P_t(\infty)=\underset{\infty}{\int\cdots\int} f(q,p,t)\prod_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k=1 \tag{6.5}$$

を与える．$P_t(\infty)=1$ は「代表点が相空間のどこかに必ずいる」という当然の事象の確率を便宜上 1 に“規格化”したものだ．値 1 に絶対的な意味はない．例えば，質点の全個数 N に等しいとおいた方が便利な場合もある．ただし，式 (6.1 a) 第 2 式や式 (6.5) の背景には，各質点の生成・消滅はないという“力学”がある．生成・消滅がないときのみ**確率保存則**，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_t(\infty)=0 \qquad \text{または} \qquad P_t(\infty)=\text{一定} \tag{6.6}$$

が成立し，規格化定数を自由に選ぶことができるのだ．光子と原子または中性子と原子核を含む系などのように粒子（光子や中性子）の生成・消滅がある場合，確率保存則 (6.6) は必ずしも成立しない．ここでは，確率保存則が成り立つ場合に話を限り，規格化条件としては式 (6.5) を採用する．したがって，平均値の式 (6.4) の分母は $P_t(\infty)=1$ である．

“力学”としては，ハミルトニアンが存在し，ハミルトンの正準方程式（2 章 2.2 節の式 (2.51 a)，(2.51 b)）が運動の時間的発展を与える場合を想定して，相空間分布関数 $f(q,p,t)$ が満足する方程式を求めよう．相空間における代表点の集団の運動を流体に見立てると便利だ．流体力学では，流体内に小さな局所系を考え，その局所系とともに移動する運動座標系に乗って物理量の時間・空間的変化を追跡する立場（**ラグランジュの見方**）と，空間的に固定した小領域に座り込んでそこに流入する流体の物理量の変化を観察する立場（**オイラーの見方**）とがあった．まず，ラグランジュの見方をとろう．確率保存則を積極的に利用するにはその方が便利だからだ．式 (6.2) では微小領域 $\mathrm{d}\Omega(q,p)$ を相空間内に固定したが，今度

はその中の各点の運動によって移動する微小領域 $d\Omega_t=d\Omega(q(t),p(t))$ をとる．その体積は $\prod_k dq_k(t)dp_k(t)$ である．この立場では，確率保存則は，

$$P_t(d\Omega_t)=f(q(t),p(t),t)\prod_{k=1}^{n}dq_k(t)dp_k(t)=一定 \tag{6.7}$$

を要求するが，リウビルの定理によって体積 $\prod_k dq_k(t)dp_k(t)$ は一定だから，

$$f(q(t),p(t),t)=一定 \qquad または \quad \frac{d}{dt}f(q(t),p(t),t)=0 \tag{6.8}$$

でなければならない．ラグランジュの見方では f の中の (q,p) はハミルトンの正準方程式に従って変化する（オイラーの見方では固定されている）ことを考慮して，式 (6.8) の全微分を実行すれば

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

となる．右辺第 2 項はポアッソンかっこ式 $\{f,H\}$ であり，式 (6.8) は方程式，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}=0 \tag{6.9}$$

を与える．ここに到達すれば，$(q(t),p(t))$ を固定点 (q,p) でおき換えてオイラーの見方にもどってよい．式 (6.9) を**リウビルの方程式**という．通常，リウビルの方程式というとき，(q,p) は固定点として扱う．なお，今後断りなく，

$$dq\,dp=\prod_{k=1}^{n}dq_k dp_k, \qquad dq=\prod_{k=1}^{n}dq_k, \qquad dp=\prod_{k=1}^{n}dp_k$$

という簡便記法を使うことがある．

さて，式 (2.74) で定義したのと同じ演算子（**リウビル演算子**），

$$\hat{L}(q,p)\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\hat{D}_{q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\hat{D}_{p_k}\right) \tag{6.10 a}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\hat{D}_{q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\hat{D}_{p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \tag{6.10 b}$$

を使おう．式(6.10 a)から式(6.10 b)への移行は等式 $\partial^2 H/\partial q_k\partial p_k=\partial^2 H/\partial p_k\partial q_k$ から明らかである．$\hat{L}(q,p)$ に引数を書き込んだのは，$\hat{L}$ が (q,p) の関数に作用する演算子であることを明示するためだ．なお，後の便宜のため，記号 $\hat{D}_{q_k}\equiv\partial/\partial q_k$，$\hat{D}_{p_k}\equiv\partial/\partial p_k$ を導入しておいた．これらの微分演算子は**交換関係**，

$$\begin{aligned}&[\hat{D}_{q_k},q_j]=\delta_{kj}, \qquad [\hat{D}_{p_k},p_j]=\delta_{kj}\\ &[\hat{D}_{q_k},p_j]=[\hat{D}_{p_k},q_j]=0, \qquad [\hat{D}_{q_k},\hat{D}_{p_j}]=0\end{aligned} \tag{6.11}$$

に従う．[　，　] は2個の演算子 $\hat{A}$，$\hat{B}$ に対して $[\hat{A},\hat{B}]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ を与えるもので，**交換子**とよばれている．式(6.11)の証明はその両辺を任意関数 $f(q,p)$ に作用させてやればよい．例えば，第1式は $[\hat{D}_{q_k},q_j]f=\partial(q_jf)/\partial q_k-q_j\partial f/\partial q_k$ が $\delta_{kj}f$ となることを示せばよい．第2式も同様．なお，(q,p) またはその関数どうしの交換子はすべてゼロになる．

ラグランジアンに収容できない非保存力や非ホロノーム型拘束力のある場合，ハミルトンの正準方程式は式(2.51 c)のようになるが，それに対応するリウビル演算子 $\hat{L}$ は，

$$\hat{L}(q,p)=\sum_{k=1}^{n}\left[\hat{D}_{q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\hat{D}_{p_k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}+Q_k'\right)\right] \tag{6.12}$$

である．ただし，$Q_k'=Q_k+\sum_a\lambda_aA_{a,k}$．速度依存型の力（摩擦力など）があって Q_k' が p の関数である場合，式(6.10 b)のように微分演算子を右側にもってくることはできない．とうぶんの間，このような場合は考えない．

さて，式(6.10)を使って式(6.9)を書けば，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\hat{L}f \tag{6.13}$$

となる．リウビルの方程式 (6.9)（または式 (6.13)）が相空間分布関数方式における力学の基礎方程式であり，ニュートンの方程式，ラグランジュの方程式，ハミルトンの正準方程式またはハミルトン-ヤコビの偏微分方程式に匹敵するものだ．運動方程式が非線形でも，リウビルの方程式はいつも線形である．

念のため，オイラーの見方をとってリウビルの方程式を導いておこう．代表点が領域 Ω 内にある確率の時間的変化の割合は，確率保存則によれば，Ω を包む超閉曲面 Σ（その面素の q_k, p_k 方向成分を $\mathrm{d}\sigma_{q_k}, \mathrm{d}\sigma_{p_k}$ とする）を通って流出する確率流の総和に等しいはずだ．すなわち，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_t(\Omega) &= -\oint_{\Sigma}\sum_{k=1}^{n}(\dot{q}_k f\mathrm{d}\sigma_{q_k} + \dot{p}_k f\mathrm{d}\sigma_{p_k}) \\ &= -\oint_{\Sigma}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}f\mathrm{d}\sigma_{q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}f\mathrm{d}\sigma_{p_k}\right) \\ &= -\int_{\Omega}\hat{L}f\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p \end{aligned}\tag{6.14}$$

最後の等式ではガウスの定理を使った．一方，左辺は $\int_{\Omega}(\partial f/\partial t)\mathrm{d}q\mathrm{d}p$ である．この等式は領域 Ω の大小や位置のいかんにかかわらず成立するので，被積分関数どうしが等しくなければならない．こうして，リウビルの方程式 (6.13) が導かれる．逆に，リウビルの方程式を満足する分布関数 $f(q, p, t)$ があれば，その積分 (6.3) の時間微分 $\mathrm{d}P_t(\Omega)/\mathrm{d}t$ は式 (6.14) の最後の式を通って第2式に到達し，確率流の総和を表す閉曲面 Σ 上の積分になる．これは確率保存則そのものだ．特に，積分領域を全相空間に広げれば ($\Omega=\infty$)，無限遠では分布関数 f がゼロになるという境界条件のため，閉曲面 Σ 上の積分が消えて，式 (6.6) が導かれる．

すべての運動量または座標変数について積分した分布関数

$\rho(q, t)$ および $F(p, t)$ はそれぞれ配位空間と運動量空間における確率密度を表す．すなわち，

$$\rho(q, t)=\int f(q, p, t)\mathrm{d}p, \qquad F(p, t)=\int f(q, p, t)\mathrm{d}q$$

$$\int \rho(q, t)\mathrm{d}p=1, \qquad \int F(p, t)\mathrm{d}p=1 \tag{6.15}$$

ただし，積分はそれぞれ配位空間と運動量空間の全域にわたって行う．

ニュートンの方程式 (1.18) に相当するリウビルの方程式の姿は，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}\cdot\frac{\boldsymbol{p}_{(i)}}{m_i}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_{(i)}}\cdot \boldsymbol{f}_{(i)}\right] f=0 \tag{6.16}$$

であり，広く用いられている．ここでは，次の記号を用いた．

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}, \frac{\partial}{\partial y_{(i)}}, \frac{\partial}{\partial z_{(i)}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_{(i)}}=\left(\frac{\partial}{\partial p_{(i)x}}, \frac{\partial}{\partial p_{(i)y}}, \frac{\partial}{\partial p_{(i)z}}\right)$$

リウビルの方程式は，1 個の自由質点に対しては，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f=0 \tag{6.17}$$

力 $F(x, p)$ によって駆動される 1 次元運動に対しては，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial (Ff)}{\partial p}=0 \tag{6.18}$$

となる．なお，調和振動子では $F=-m\omega^2 x$，摩擦係数 $m\varkappa$ をもつ摩擦力に対しては $F=-\varkappa p$ である．

6.2　相空間分布関数の時間的発展

さて，リウビルの方程式は 1 階の線形偏微分方程式だ．したがって，初期時刻 t_0 における初期分布，

$$f(q, p, t_0)=\phi(q, p) \tag{6.19}$$

を与えれば，以後の時刻 $t(>t_0)$ に対する分布関数は一義的に定まり，

$$f(q,p,t)=\int\cdots\int_{\infty} K(q,p,t\mid q',p',t_0)\phi(q',p')\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p' \tag{6.20}$$

と書くことができる．式 (6.20) は積分核 $K(q,p,t\mid q',p',t)$ によって相空間分布関数の時間的発展を表した式だ．代表点が $(q^{(0)},p^{(0)})$ にいるという初期分布，

$$\phi_0(q,p)=\prod_{k=1}^{n}\delta(q_k-q^{(0)}{}_k)\delta(p_k-p^{(0)}{}_k) \tag{6.21}$$

をとれば，式 (6.20) は $f(q,p,t)=K(q,p,t\mid q^{(0)},p^{(0)},t_0)$ を与える．これでわかるように，積分核 $K(q,p,t\mid q',p',t_0)$ の意味は時刻 t_0 で (q',p') にいた代表点が時刻 t のとき (q,p) で見いだされることの確率である．もちろん，初期条件は，

$$K(q,p,t_0\mid q',p',t_0)=\delta(q-q')\delta(p-p') \tag{6.22}$$

である．ただし，簡便記法，

$$\delta(q-q')\delta(p-p')=\prod_{k=1}^{n}\delta(q_k-q'_k)\delta(p_k-p'_k) \tag{6.23}$$

を用いた．今後，断りなしにこの記法を使う．

さて，式 (6.22) を初期条件とする運動は相空間内では１本の流線になるはずだから，

$$K(q,p,t_0\mid q',p',t_0)=\delta(q-q_t(q',p';t_0))\delta(p-p_t(q',p';t_0)) \tag{6.24}$$

でなければならない．ただし，$q_t(q',p';t_0)$ と $p_t(q',p';t_0)$ は時刻 t_0 での初期値 (q',p') に対する運動を表す正準力学変数であり，ハミルトンの正準方程式を満足している．この式を式 (6.20) に入れて，積分変数を (q',p') から，

$$Q_k=q_k-q_{kt}(q',p';t_0),\qquad P_k=p_k-p_{kt}(q',p';t_0)$$
$$(k=1,\cdots,n) \tag{6.25}$$

に変換しよう．(q,p) は $f(q,p,t)$ の引数であり固定点だから，(Q,P) の時間的変動は $(-q_t,-p_t)$ と同じになり，ハミルトンの正準方程式を満足する．したがって，変数変換 $(q',p')\to$

(Q, P) は運動による変化（正準変換）となって，そのヤコビアンは1に等しい．この正準変換が $q'=q'(Q, P, t)$，$p'=p'(Q, P, t)$ を与えたとすれば，式 (6.20) は，

$$f(q, p, t)=\underset{\infty}{\int\cdots\int}\delta(Q)\delta(P)$$
$$\times\phi(q'(Q, P, t), p'(Q, P, t))\mathrm{d}Q\mathrm{d}P$$
$$=\phi(q_{t_0}(q, p\,;t), p_{t_0}(q, p\,;t)) \qquad (6.26)$$

となる．ϕ の引数は，$Q=0$ および $P=0$，すなわち，

$$q_k=q_{kt}(q', p'\,;t_0), \qquad p_k=p_{kt}(q', p'\,;t_0)$$
$$(k=1, \cdots, n) \qquad (6.27)$$

を解いて，(q', p') を (q, p) の関数として表した関数である．いい換えれば，終時刻 t においてちょうど (q, p) を与えるような時刻 t_0 での初期値が $q_{t_0}(q, p\,;t)$ と $p_{t_0}(q, p\,;t)$ なのである．ちょうど $q_t(q', p'\,;t_0)$ と $p_t(q', p'\,;t_0)$ の時間逆行解になっている．これが相空間分布関数の時間的発展である．

リウビル演算子が式 (6.12) の場合は，式 (6.26) には変数変換 $(q', p')\to(Q, P)$ のヤコビアン，

$$J(q, p)=\left(\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}\right)_{Q=P=0} \qquad (6.28)$$

を掛けておかなければならない．式 (6.12) の Q'_k が p の関数でなければ，$J=1$．

積分核 K の方程式を求めよう．$K(q, p, t\,|\,q', p', t_0)$ が $t<t_0$ に対して値ゼロをとると決めると，この積分核は $t=t_0$ で不連続になり，式 (6.22) だけジャンプするわけだ．したがって，K の時間微分は $t=t_0$ のまわりでは式 (6.22) に $\delta(t-t_0)$ を掛けたものに等しい（3章問題参照）．一方，$t>t_0$ に対しては積分核が分布関数と同じリウビルの方程式に従うことは明らかだ．ゆえに，積分核はリウビルの方程式のグリーン関数であり，方程式，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\hat{L}(q,p)\right]K(q,p,t\mid q',p',t_0)=\delta(t-t_0)\delta(q-q')\delta(p-p') \tag{6.29}$$

を満足する．

さて，相空間分布関数の時間的発展と力学変数の時間変動との関係をもう少していねいに見ておこう．ただし，ハミルトニアン H，したがって，演算子 $\hat{L}(q,p)$ が時間変数 t を生に含まないとして話を進める．一般の場合（H が t を生に含む場合）でも大筋に変りはないが，数学的取扱いが煩雑になるので省略する．時刻 t_0 で初期分布 $\phi(q,p)$ をもつ式 (6.13) の形式解と式 (6.29) の形式解は，

$$f(q,p,t)=\exp[-\tau\hat{L}(q,p)]\phi(q,p) \tag{6.30}$$

$$K(q,p,t\mid q',p',t_0)=\theta(\tau)\exp[-\tau\hat{L}(q,p)]\times\delta(q-q')\delta(p-p') \tag{6.31}$$

である．ただし，$\tau\equiv t-t_0$．$\theta(\tau)$ は $\tau<0$ のときゼロ，$\tau>0$ のとき 1 となるヘビサイドの階段関数だ(3 章問題参照)．この形式解では，演算子 $\hat{L}(q,p)$ の指数関数を導入したが，一般に演算子の関数はべき級数展開で定義されていると考えてよい．例えば，演算子 $\hat{A}$ の指数関数は，

$$\exp(\lambda\hat{A})=1+\lambda\hat{A}+\frac{\lambda^2}{2!}\hat{A}^2+\frac{\lambda^3}{3!}\hat{A}^3+\cdots\cdot \tag{6.32}$$

によって定義される．λ は連続的なパラメーターである．ゆえに，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\exp(\lambda\hat{A})=\hat{A}\exp(\lambda\hat{A})=\exp(\lambda\hat{A})\,\hat{A} \tag{6.33}$$

も通常の数の関数同様成立する．しかし，一般には $\exp(\hat{A}+\hat{B})=\exp(\hat{A})\exp(\hat{B})$ は成立しない．等号は $[A,B]=0$ の場合に限って成り立つ．なお，式 (6.31) は式 (6.30) をデルタ関数の性質によって，

$$f(q,p,t)=\int\cdots\int_{\infty}\exp[-(t-t_0)\hat{L}(q,p)]$$
$$\times\delta(q-q')\delta(p-p')\phi(q',p')\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'$$

と書き直し，式 (6.20) と見比べても出てくるものである．

簡単のため，式 (6.30) において $t_0=0$ と選び，形式解 (6.30) を平均値の定義式 (6.4) に代入すれば，いまの場合 $P_t(\infty)=1$ だから，

$$\langle F\rangle_t=\int\cdots\int_{\infty} e^{-t\hat{L}}F_t(q,p,t)\phi(q,p)\mathrm{d}q\mathrm{d}p \tag{6.34}$$

となる．ただし，$e^{-t\hat{L}}$ による $F(q,p,t)$ の相似変換を，

$$F_t(q,p,t)\equiv e^{t\hat{L}}F(q,p,t)e^{-t\hat{L}} \tag{6.35}$$

と書いた．正準変数 (q,p) に対しても同様の相似変換，

$$q_{j,t}=e^{t\hat{L}}q_je^{-t\hat{L}},\quad p_{j,t}=e^{t\hat{L}}p_je^{-t\hat{L}}\qquad(j=1,\cdots,n) \tag{6.36}$$

を定義しておこう．$t=0$ での初期条件は $q_{j,0}=q_j$，$p_{j,0}=p_j$ と選んだわけだ．さて，式 (6.35) の右辺で $F(q,p,t)$ を q と p についてべき級数展開し，

$$e^{t\hat{L}}q^2e^{-t\hat{L}}=(e^{t\hat{L}}qe^{-t\hat{L}})(e^{t\hat{L}}qe^{-t\hat{L}})={q_t}^2$$
$$e^{t\hat{L}}q^3e^{-t\hat{L}}=(e^{t\hat{L}}qe^{-t\hat{L}})(e^{t\hat{L}}qe^{-t\hat{L}})(e^{t\hat{L}}qe^{-t\hat{L}})={q_t}^3$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$e^{t\hat{L}}p^2e^{-t\hat{L}}=(e^{t\hat{L}}pe^{-t\hat{L}})(e^{t\hat{L}}pe^{-t\hat{L}})={p_t}^2$$
$$e^{t\hat{L}}p^3e^{-t\hat{L}}=(e^{t\hat{L}}pe^{-t\hat{L}})(e^{t\hat{L}}pe^{-t\hat{L}})(e^{t\hat{L}}pe^{-t\hat{L}})={p_t}^3$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

を使えば，ただちに，

$$F_t(q,p,t)=F(q_t,p_t,t) \tag{6.37}$$

が得られる．他方，式 (6.34) の積分内の第1因子 $e^{-t\hat{L}}$ をべき級数展開し(式 (6.32)を見よ)，L の具体形式 (6.10 b) を代入すれば，展開の第1項以外すべて，

$$\int\cdots\int_{\infty}\frac{\partial}{\partial q_k}(\cdots\cdot)\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p\quad \text{または}\quad \int\cdots\int_{\infty}\frac{\partial}{\partial p_k}(\cdots\cdot)\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p$$

の形の積分になる．これは無限遠方にある閉曲面上の積分にな

り，かっこ内の量がそこでゼロであるため消えてしまう．したがって，式 (6.34) の中では第1因子 $e^{-t\hat{L}}$ は1とおいてよいことがわかった．結局，平均値の式は，

$$\langle F\rangle_t=\int_\infty\cdots\int F(q_t,p_t,t)\phi(q,p)\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p \tag{6.38}$$

となる．

では，q_t および p_t はどのような時間的変動をするか？　それを調べるため，定義式 (6.36) の両辺を時間微分しよう．まず，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{j,t}&=e^{t\hat{L}}(\hat{L}q_j-q_j\hat{L})e^{-t\hat{L}}=e^{t\hat{L}}[\hat{L},q_j]e^{-t\hat{L}}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{j,t}&=e^{t\hat{L}}(\hat{L}p_j-p_j\hat{L})e^{-t\hat{L}}=e^{t\hat{L}}[\hat{L},p_j]e^{-t\hat{L}}\end{aligned} \tag{6.39}$$

であるが，演算子 $\hat{L}$ に式 (6.10) を用い，交換関係 (6.11) を使えば，

$$\begin{aligned}[\hat{L},q_j]&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}[\hat{D}_{q_k},q_j]=\frac{\partial H}{\partial p_j}\\ [\hat{L},p_j]&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_k}[\hat{D}_{q_k},q_j]=-\frac{\partial H}{\partial p_j}\end{aligned} \tag{6.40}$$

となる．これを式 (6.39) に入れると，左右の演算子 $e^{t\hat{L}}$ と $e^{-t\hat{L}}$ の効果は，式 (6.35) から式 (6.37) を出した経過でわかるように，(q,p) を (q_t,p_t) でおき換えるものだ．すなわち，式 (6.39) はハミルトンの正準方程式にほかならない．一般的なリウビル演算子 (6.12) を使えば，式 (6.39) 第2式は式 (2.51 c) を与える．

力学量の平均値に対する公式 (6.38) は，$F(q,p,t)$ の (q,p) に運動方程式の解を入れ，初期分布 $\phi(q,p)$ を重率として平均したものになっている．これは当然の結果だ．式 (6.38) の方式に従うことは，力学系の時間発展をすべて力学変数に背負わせることを意味している．これに対して元の方式 (6.4) では，力学系の時間発展を担うのは相空間分布関数であって，力

学変数ではない．どちらも同じ平均値を与える．両者はまったく同等であって，記述方式の違いしかない．量子力学の言葉を使えば，前者は“ハイゼンベルク描像”であり，後者は“シュレーディンガー描像”である．

同様な計算で，積分核の式 (6.24) を式 (6.31) から導出することができる．それには，式 (6.31) の指数演算子の作用する相手が $\delta(q-q')\delta(p-p')$ であることによるおき換え $\exp[-\tau\hat{L}(q,p)]\delta(q-q')\delta(p-p')=\exp[-\tau\hat{L}^\dagger(q',p')]\delta(q-q')\delta(p-p')$ を使えばよい．$\hat{L}^\dagger$ は $\hat{L}$ の共役演算子であり，式 (6.12) の微分演算子の符号を反転して，位置を右に変えたものである．すなわち，

$$\hat{L}^\dagger(q,p)=-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\hat{D}_{q_k}-\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}+Q_k{}'\right)\hat{D}_{p_k}\right] \tag{6.41}$$

なぜならば，$\hat{D}_{q_k}\delta(q-q')=-\hat{D}_{q_k'}\delta(q-q')$，$\hat{D}_{p_k}\delta(p-p')=-\hat{D}_{p_k'}\delta(p-p')$ であり，任意の関数 $G(q,p)$ に対して，

$$G(q,p)\delta(q-q')\delta(p-p')=G(q',p')\delta(q-q')\delta(p-p')$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_{p_k}G(q,p)\delta(q-q')\delta(p-p')&=-G(q',p')\hat{D}_{p_k'}\delta(q-q')\delta(p-p')\\&=[\hat{D}_{p_k'}G(q',p')]^\dagger\delta(q-q')\\&\qquad\delta(p-p')\end{aligned}$$

が成立するからである．$\hat{L}^\dagger(q',p')$ が (q',p') に作用する演算子であることに注意すれば，式(6.31)は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}K(q,p,t\mid q',p',t_0)&=\theta(\tau)\exp[-\tau\hat{L}^\dagger(q',p')]\\&\qquad\delta(q-q')\delta(p-p')\\&=\theta(\tau)\delta(q-q'_\tau)\delta(p-p'_\tau)\,;\end{aligned} \tag{6.42}$$

$$\left.\begin{aligned}q'_{j,\tau}&=\exp[-\tau\hat{L}^\dagger(q',p')]q'_j\exp[\tau\hat{L}^\dagger(q',p')]\\p'_{j,\tau}&=\exp[-\tau\hat{L}^\dagger(q',p')]p'_j\exp[\tau\hat{L}^\dagger(q',p')]\end{aligned}\right. \tag{6.43}$$

なお，式 (6.42) の右側には $\exp[-\tau\hat{L}(q',p')]$ が出てくるが，これは 1 に作用すると考えてよい．したがって，指数演算子のべき展開と式 (6.41) により，展開の第 1 項（=1）しか残らない．さらに，式 (6.43) が $q'_{j,\tau}=q_{j\tau}(q',p';0)$ と $p'_{j\tau}=p_{j\tau}(q',p';0)$ を与えること（式 (6.24) を見よ），すなわち，

式 (6.42) が式 (6.24) に等しいことの証明はそれほど難しくはない．読者にまかせよう．式 (6.42) を式 (6.20) に入れれば，式 (6.26) が得られるわけだが，いまの場合，ϕ の引数は $q_{-\tau}(q, p\,;0)$ と $p_{-\tau}(q, p\,;0)$ である．

1個の自由質点 (6.17) の場合は，

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)=\phi\left(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{m}t, \boldsymbol{p}\right) \tag{6.44}$$

であり，1次元摩擦力 (6.18) の場合は，

$$f(q, p, t)=e^{\kappa t}\ \phi\left(x+\frac{p}{m\kappa}(1-e^{\kappa t}), pe^{\kappa t}\right) \tag{6.45}$$

である．いずれの場合も $t_0=0$ とおいた．

最後に，摂動論の話を少々しておこう．天体力学への応用で古来有名なこの問題をこれまで無視してきたからだ．ハミルトニアンを非摂動項 H_0 と摂動項 H' の和に分け，それに対応してリウビル演算子も分解する．すなわち，

$$H=H_0+H', \qquad \hat{L}=\hat{L}_0+\hat{L}' \tag{6.46}$$

とおこう．運動の大部分が H_0（または $\hat{L}_0$）で支配されているとき，H'（または$\hat{L}'$）のわずかな影響を調べようとするのが摂動論である．ここでは上記の相空間分布関数または積分核の時間発展演算子 $\exp(-t\hat{L})$ の摂動級数を求める．まず，

$$\exp(-t\hat{L})=\exp[-t(\hat{L}_0+\hat{L}')]=\exp(-t\hat{L}_0)\,\hat{U}_{\mathrm{I}}(t)\,; \tag{6.47 a}$$

$$\hat{U}_{\mathrm{I}}(t)\equiv\exp(t\hat{L}_0)\exp(-t\hat{L}) \tag{6.47 b}$$

とおく．式 (6.47 b) 右辺の時間微分は $\exp(t\hat{L}_0)(\hat{L}_0-\hat{L})\exp(-t\hat{L})$ となるので，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}_{\mathrm{I}}(t)=-\hat{L}'_{\mathrm{I}}(t)\,\hat{U}_{\mathrm{I}}(t)\,; \tag{6.48 a}$$

$$\hat{L}'_{\mathrm{I}}(t)\equiv\exp(t\hat{L}_0)\hat{L}'\exp(-t\hat{L}_0) \tag{6.48 b}$$

が成立する．これは未知演算子 $\hat{U}_{\mathrm{I}}(t)$ の方程式である．$\hat{L}'$ は一般に (q, p) と微分演算子 $(\hat{D}_q, \hat{D}_p)$ の関数であるが，それらを $(q^0(t), p^0(t))$ と $(D_q{}^0(t),\ D_p{}^0(t))$ でおき換えたのが式(6.48 b)の $\hat{L}'_{\mathrm{I}}(t)$ だ．0印の演算子は非摂動部分 $\hat{L}_0$による時間発展，

$$q_k^0(t)=\exp(t\hat{L}_0)q_k\exp(-t\hat{L}_0)$$
$$\hat{D}_{p_k}^0(t)=\exp(t\hat{L}_0)\hat{D}_{p_k}\exp(-t\hat{L}_0) \tag{6.49}$$

を表す．$p^0(t)$，$\hat{D}_q^0(t)$ についても同様．初期条件 $\hat{U}_\mathrm{I}(0)=1$ のもとでは，式 (6.48 a) は積分方程式，

$$\hat{U}_\mathrm{I}(t)=1-\int_0^t \hat{L}'_\mathrm{I}(t')\hat{U}_\mathrm{I}(t')\mathrm{d}t' \tag{6.50}$$

に等価である．この積分方程式を逐次代入法で解けば，

$$\hat{U}_\mathrm{I}(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\cdots\int_0^{t_\nu}\mathrm{d}t_\nu$$
$$\times\hat{L}'_\mathrm{I}(t_1)\hat{L}'_\mathrm{I}(t_2)\cdots\cdots\hat{L}'_\mathrm{I}(t_\nu) \tag{6.51}$$

が得られる．これを式 (6.47 a) に入れれば，時間発展演算子 $\exp(-t\hat{L})$に対する摂動級数が求められるというわけである．

この摂動級数の式を使って，$\exp(-t\hat{L})$ による積分核 $K(q,p,t\mid q',p',t')$ を $\exp(-t\hat{L}_0)$ が与える非摂動積分核 K_0 と $\hat{L}'_I$ の級数に展開することができる．読者自ら試みていただきたい．

6.3　相空間分布関数の縮小

相空間分布関数をいくつかの変数について積分することを考えよう．部分相空間に対する分布関数をつくるためである．一般座標表示のまま話を進めてもよいが，ここでは直角座標変数の使用を念頭においてベクトル記法を用いる．

相空間分布関数 $f(\boldsymbol{r}_{(1)},\boldsymbol{r}_{(2)},\cdots\cdots,\boldsymbol{r}_{(N)};\boldsymbol{p}_{(1)},\boldsymbol{p}_{(2)},\cdots\cdots,\boldsymbol{p}_{(N)};t)$ の変数の中で，s 対の変数 $(\boldsymbol{r}_{(i)},\boldsymbol{p}_{(i)})$ $(i=1,2,\cdots\cdots,s;s<N)$ を残して他の変数について積分し，

$$f^{(s)}(\boldsymbol{r}_{(1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{r}_{(s)};\boldsymbol{p}_{(1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{p}_{(s)};t)$$
$$=\int\cdots\cdots\int f(\boldsymbol{r}_{(1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{r}_{(s)},\boldsymbol{r}_{(s+1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{r}_{(N)};\boldsymbol{p}_{(1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{p}_{(s)},$$
$$\boldsymbol{p}_{(s+1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{p}_{(N)};t)\prod_{i=s+1}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(i)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{6.52}$$

をつくる．ただし，$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(i)}=\mathrm{d}x_{(i)}\mathrm{d}y_{(i)}\mathrm{d}z_{(i)}$，$\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(i)}=\mathrm{d}p_{x(i)}\mathrm{d}p_{y(i)}\mathrm{d}p_{z(i)}$（$i$ は質点の番号）．積分は全相空間にわたって行うが，記号∞は省略した(以下同様)．式(6.52)を**縮小した分布関数**または**平均化分布関数**という．その物理的意味は，$s+1$ 番目から N 番目の質点はどんな位置や運動量をとってもよいが，1番から s 番までの質点が $(\boldsymbol{r}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(s)};\boldsymbol{p}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{p}_{(s)})$ の値をとるという確率である．変数の並べ方の順序は基本的に自由であるから，何かの理由で注目した s 対の変数を1番から s 番の場所においたと考えていただきたい．定義(6.52)からただちに漸化式，

$$f^{(s)}(\boldsymbol{r}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(s)};\boldsymbol{p}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{p}_{(s)};t)$$
$$=\iint f^{(s+1)}(\boldsymbol{r}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(s)},\boldsymbol{r}_{(s+1)};\boldsymbol{p}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{p}_{(s)},\boldsymbol{p}_{(s+1)};t)$$
$$\times\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(s+1)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(s+1)} \tag{6.53}$$

が得られる．

特に，$s=1$ の1体平均化分布関数，

$$f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=\int\cdots\int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{r}_{(N)};\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{p}_{(N)};t)$$
$$\prod_{i=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(i)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{6.54}$$

について考えよう．これは1個の粒子を多体系（気体，液体，固体など）に投げ込んだときに，その粒子が行う運動の確率分布を与える．ブラウン運動などの基礎を議論する場合に重要な役割を演じる関数だ．もちろん，規格化条件 $\iint f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=1$ に従う．力がポテンシャル(1.35)をもつ保存力(1.37)の場合に $f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ の方程式を導いてみよう．出発点はリウビルの方程式(6.16)であるが，力は式(1.37)の $\boldsymbol{f}_{(i)}=-\partial V/\partial\boldsymbol{r}_{(i)}$ である．記号 $\partial/\partial\boldsymbol{r}_{(i)}$ の定義は式(6.16)の下で与えておいた（式(1.37)では別の記号 $\nabla_{(i)}$ を用いている）．式(6.16)において，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{(1)}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{(1)}$，$m=m_i$ とおき，2番目以降の他の変数について積分するのだが，分布関数は全相空間を

包む無限遠の閉曲面上でゼロになるとしておこう．したがって，

$$\int\cdots\int\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}\prod_{j=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(j)}=0 \qquad (i\neq 1)$$

$$\int\cdots\int\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}_{(i)}}\prod_{j=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(j)}=0 \qquad (i\neq 1)$$

が成立し，次式が得られる．

$$\int\cdots\int\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_{(i)}}{m_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}\prod_{j=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(j)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(j)}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$

$$\int\cdots\int\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}\sum_{j=2}^{N}V_{(j)\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}_{(j)})\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_{(i)}}\prod_{j=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(j)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(j)}$$

$$=\frac{\partial V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$

$$\int\cdots\int\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{(i)}}\cdot\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}V_{jk}(\boldsymbol{r}_{(j)},\boldsymbol{r}_{(k)})\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}_{(i)}}\prod_{l=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(l)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(l)}$$

$$=\int\cdots\int\left(\sum_{i=2}^{N}\frac{\partial V_{1i}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{(i)})}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\prod_{l=2}^{N}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(l)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(l)}$$

$$=\iint\sum_{i=2}^{N}\frac{\partial V_{1i}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{(i)})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{(i)};\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_{(i)};t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(i)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(i)}$$

こうして，縮小した分布関数 $f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ の方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)-\frac{\partial V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$

$$=\sum_{i=2}^{N}\iint\frac{\partial V_{1i}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{(i)})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{(i)};\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_{(i)};t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_{(i)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{(i)} \tag{6.55}$$

が得られる．右辺が $f^{(2)}$ を含むため，$f^{(1)}$ の方程式は $f^{(1)}$ だけで閉じない．つまり，$f^{(1)}$ を知るためには $f^{(2)}$ の知識が必要になるというわけだ．$f^{(2)}$ を知るため，同じような手続きによって，その方程式をつくると $f^{(2)}$ だけで閉じず，今度は $f^{(3)}$ が入ってくる．同様に $f^{(3)}$ の方程式には $f^{(4)}$ が現れる．一般に $f^{(s)}$

の方程式は $f^{(s+1)}$ を含む．こうして，平均化分布関数 $f^{(1)}$，$f^{(2)}$，…，$f^{(N-1)}$，$f^{(N)}=f$ は順番につながる連立方程式を満足する．これを平均化分布関数の**階級**という．f を与えて $f^{(N-1)}$ を求め，$f^{(N-1)}$ から $f^{(N-2)}$ を知り，…，という手続きを繰り返して，最後に $f^{(2)}$ によって $f^{(1)}$ をつくるという階段構造があるからである．

きわめて多数の質点(粒子)を含む系のリウビル方程式を解いて，相空間分布関数を求めることは，一般には，ほとんど不可能である．また，上記のように高位の分布関数を順次消去して $f^{(1)}$ または $f^{(2)}$ の方程式をつくる作業も元の方程式を直接解くのと同程度に難しい．では，どうしたらよいか？　1.1節で述べたように，平均場中の1体近似やたかだか2体近似によって問題を扱う以外によい方法はない．そのようにするために，階段型連立方程式を低位の分布関数のところ，例えば，$f^{(1)}$ のところで打ち切り，その中の $f^{(2)}$ を $f^{(1)}$ の組合せで近似してしまうという操作をもち込むのである．多くの場合，この種の問題は平衡分布からごくわずかずれた分布状態から平衡状態への回帰を調べようとするものなので，平衡分布の性質を使って比較的簡単な形で $f^{(2)}$ の項を $f^{(1)}$ で書き直すことも可能である．このようにすれば，$f^{(1)}$ だけで閉じた方程式が得られる．また，$f^{(2)}$ で打ち切るつもりならば，その中の $f^{(3)}$ を $f^{(1)}$ と $f^{(2)}$ で表す近似を工夫しなければならない．この場合，$f^{(1)}$ と $f^{(2)}$ で閉じた連立方程式が現れる．2粒子相関が重要な現象に対しては，このような近似法が必要である．

非平衡状態から平衡状態への接近は，多くの場合，不可逆過程となる．不可逆過程を記述する $f^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ の半現象論的な方程式を紹介しておこう．$f^{(2)}$ の項（式(6.55)の右辺）の右辺を近似する方法によって，最終的に出てくる方程式の形が違う．ここでは結果だけを書くにとどめる．

a　ボルツマンの方程式

次の方程式をボルツマンの方程式という．

$$\frac{\partial}{\partial t}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)-\frac{\partial V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$
$$=N\iint\sigma(p,\omega)\frac{p}{m}[f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1',t)f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2',t)$$
$$-f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t)f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_2 \qquad (6.56)$$

この右辺は2個の粒子が衝突して運動量を$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$から$(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')$に変える過程からの寄与を取り入れたものだ．$\sigma(p,\omega)$はその衝突の断面積(6.4節を見よ)，$\boldsymbol{p}$は衝突前の相対運動量，$p$はその大きさ，$\omega$は$\boldsymbol{p}$の方向を極軸として測った散乱立体角である．ただし，粒子の個数Nはきわめて大きいとした．

b　フォッカー-プランクの方程式

次の方程式をフォッカー-プランクの方程式という．

$$\frac{\partial}{\partial t}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)-\frac{\partial V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$
$$=\zeta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}+k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right)f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) \qquad (6.57)$$

ζは摩擦係数，k_{B}はボルツマンの定数，Tは絶対温度である．

式(6.56)では$f^{(2)}$を2個の$f^{(1)}$の積で表したが，式(6.57)は$f^{(2)}$を1個の$f^{(1)}$で近似したものだ．いずれもエントロピーが増大して平衡分布，

$$f^{(1)}{}_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=\exp\left[\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}(E_0-H(\boldsymbol{r},p))\right] \qquad (6.58)$$

に接近して行く不可逆過程を記述する方程式である．E_0は自由エネルギーであり，規格化条件$\iint f_{\mathrm{eq}}{}^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=1$によって決められているものだ．両者とも気体運動論やブラウン運動論などで広く利用されている．

このほかに，

$$\frac{\partial}{\partial t}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)-\frac{\partial V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$
$$=-\frac{1}{\tau}(f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)-f^{(1)}{}_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})) \qquad (6.59)$$

という近似もある．τ は平衡状態にもどるまでの緩和時間である．

一般に，ハミルトニアンが時間を生に含まない場合，リウビル方程式 (6.8) が平衡状態の解，

$$f_{\mathrm{eq}}(q, p, t)=\left[\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}(E_0-H(q, p))\right] \tag{6.60}$$

をもつことは容易にわかる．相空間分布関数が平衡状態においてどのような分布をするか，非平衡状態はどのようにして平衡状態に接近するかという問題は統計力学の中心問題だ．しかし，この本の守備範囲を越えるので，この辺でやめておこう．

なお，すべての粒子が同種粒子である場合，

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r}, t)&=N\int f^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\\&=\langle\sum_{i=1}^{N}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{(i)}(i))\rangle\end{aligned} \tag{6.61}$$

は実際の粒子密度を表す．$\langle\cdots\cdot\rangle$ は式 (6.4) の意味での平均値である．ミクロ的な粒子運動とマクロ的な連続体理論の密度関数とを結び付ける関係だ．これを橋渡しに使って，リウビル方程式から流体力学や弾性体力学の基礎方程式を導くことができる．

6.4 衝突・散乱現象と相空間分布関数

物質内の多数粒子の問題に深入りすることはやめたが，その代りに衝突・散乱現象を相空間分布関数で扱ってみよう．原子，原子核，素粒子などの研究はミクロ粒子の衝突・散乱現象を通して行われる場合が多い．加速器などでつくったミクロ粒子のビームを原子や原子核を含む標的物質に当て，散乱されて出てくるミクロ粒子を検出するという実験が主流である．入射ビームや標的内にはきわめて多数の粒子があるので，相空間分布関数を使う舞台としては好都合のように見える．しかし，以下で

説明するように，このような見掛け上多数個の衝突・散乱現象も実は1個の入射粒子と1個の散乱体の衝突問題に帰着させることができる．とはいっても，ミクロ粒子の衝突現象では，各粒子の初期条件（特に初期位置）を正確に指定することは不可能だ．入射ビームは通常ほとんど同じ初期運動量をもつ粒子で構成されているが，ミクロ的尺度で見てかなり大きな空間的広がりがあるため，いろいろな初期位置をもつ多数の粒子の集団だからである．この状況は後で相空間分布関数 (6.74) によって表現される．

まず，衝突・散乱現象の力学を概観しよう．歴史上有名な例としてはラザフォードの実験がある．ラザフォードはラジウムから出る α 線を金箔(ぱく)に当てて α 粒子の散乱を観察し，原子核の存在を確認した．α 粒子はヘリウム原子核であり，$+2e$ の電荷（e は素電荷）と陽子の約4倍の質量（電子質量の約7 200倍）をもっている．金箔内には金の原子核と電子があるが，質量比からみても電子との衝突は無視してよい．したがって，本質的な現象は α 粒子と金の原子核との衝突である．金という固体は 10^{-8} cm 程度の格子間隔をもつ結晶であり，α 粒子や金の原子核の大きさは 10^{-12}～10^{-13}cm の程度だから，α 粒子の大きさで測れば原子核の間隔は 10^4～10^5 倍もある．α 粒子の大きさを1 m とすれば原子核間隔は実に10～100 km ほどになる．α 粒子は1個の原子核と衝突する際，隣の原子核の存在を気にしなくてもよい．また，金箔は十分薄いので，α 粒子は衝突を繰り返すことなく突き抜けてしまうだろう．一方，ラジウムから出てくる α 線内の α 粒子の密度はきわめて小さい．ポツリポツリと1個ずつ出てくるとみても間違いではないほどだ．結局，1個の α 粒子と1個の金の原子核の衝突が独立に多数回行われて，それを重ね焼きしたのがラザフォードの実験である．はるかに強い粒子ビーム，例えば，直径1 mm の小孔から射出される1 mA の電子ビームでも電子の平均間隔は 10^{-4} cm ぐらいあり，ミクロ的にはきわめて大きい．

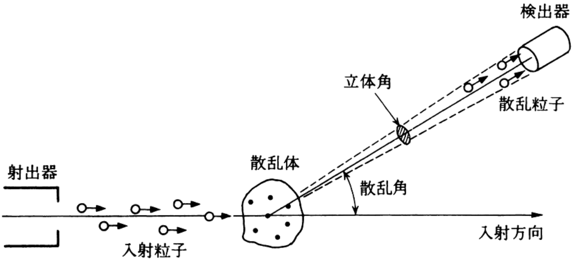


図 6.1 衝突・散乱実験

はじめに，ミクロ粒子の衝突・散乱実験を記述するのに必要なパラメーターをあげておこう．実験は図 6.1 のようにして行われる．射出器を出た入射粒子ビームを標的に当て，散乱されて出てきた粒子を離れたところにおいた検出器でとらえるというものだ．通常，射出器はほとんど一定の運動量を粒子に与えるように設計されている．さらに，ビームの強さがどのくらいかをいう必要がある．ビーム強度は入射方向に垂直な平面の単位面積を通って単位時間内に流入する粒子数で表す．運動量 $\boldsymbol{p}$ とビーム強度 N_0 が入射粒子ビームを特徴づけるパラメーターである．一方，標的内の散乱体は運動量がほとんどゼロの初期状態にあると見てよい．ビームが当たる部分の標的内散乱体の数 n も必要なパラメーターだ．散乱粒子の検出は，図 6.2 のように，入射方向を極軸とする極角 θ，方位角 ϕ の方向においたカウンターなどの検出器によって行われる．この検出器の開口部の面積を ΔS とすれば，それが衝突点に対して張る立体角は $\Delta\omega=(\Delta S/R^2)=\sin\theta\,\Delta\theta\,\Delta\phi$ である（R は衝突点と検出器の距離）．実験結果は単位時間内に検出器に入ってくる粒子数だが，それは n と N_0 と $\Delta\omega$ に比例するだろう．すなわち，

$$\Delta N = nN_0\sigma(\theta, \phi)\Delta\omega \tag{6.62}$$

である．比例定数を $\sigma(\theta, \phi)$ と書いた．このとき，ΔN を $nN_0\Delta\omega$ で割った量，

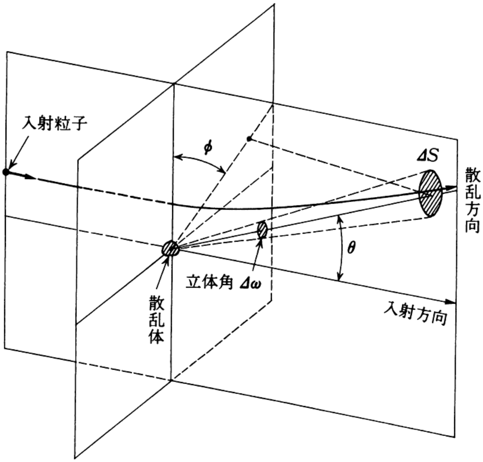


図 6.2　散乱角

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega} \equiv \frac{\Delta N}{nN_0\Delta\omega} = \sigma(\theta, \phi) \tag{6.63}$$

を衝突・散乱の**微分断面積**という．面積の次元をもっているので，この名前がついた．$\Delta\sigma = \sigma(\theta, \phi)\Delta\omega$ は衝突・散乱によって粒子を (θ, ϕ) 方向の立体角 $\Delta\omega$ に送り込む事象に関する散乱体の有効面積と考えてよい．$\sigma(\theta, \phi)$ は 1 個の入射粒子と 1 個の散乱体の力学だけで決るものだ．微分断面積をすべての立体角について積分したもの，

$$\sigma \equiv \int \sigma(\theta, \phi)\mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \phi) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{6.64}$$

を**全断面積**という．私たちが実験から直接手に入れることのできるデータは ΔN，すなわち，$\sigma(\theta, \phi)$ である．力学の仕事はこの微分断面積を理論的に計算することだ．

なお，ラザフォードの実験は金の原子核による α 粒子の弾性衝突である．入射粒子と散乱体の衝突によって両者の性質や内部構造が変らず，新しい粒子の発生もない場合を弾性衝突と

いい，それ以外の場合を非弾性衝突という．ここでは弾性衝突を念頭において話を進める．

微分断面積を理論的に求めるにはどうしたらよいか？ まず簡単のため，散乱体を不動の固定点とし，散乱体が入射粒子に及ぼす力を中心力であるとしよう．散乱体を固定中心力でおき換えて1体問題にしたわけだが，2体問題としての取扱いは後で行う．このとき，軌道角運動量の保存則が成立し，粒子の軌道は入射方向を表す直線と散乱体の位置で決る平面内にある．したがって，入射方向を極軸とする球座標の角度変数 (θ, ϕ) によって粒子の運動方向を表せば（図6.2），ϕ についての分布は散乱後も変らない．すなわち，中心力による散乱では $\sigma(\theta, \phi)$ は ϕ については一様であり，散乱角 θ だけの関数となる．衝突現象を力学の問題として扱うためには，初期条件を設定しなければならない．それには**衝突パラメーター**という量が便利だ．衝突パラメーターとは粒子の初期位置を通り入射方向に沿って引いた直線と散乱体との距離 b をいう．図6.3では，散乱体の位置を原点とし，入射方向を z 軸としてもつ直角座標系を設定して衝突パラメーターを図示した．衝突問題では，

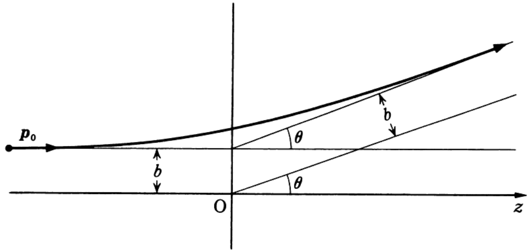


図6.3 衝突パラメーター

粒子が初めその直線上のどこにいたかは問題ではない．b だけが意味をもつ．いま，初期運動量の値が p_0 であったとすれば，角運動量は $L = p_0 b$ であり保存される．したがって，散乱後の粒子が乗る直線と散乱体との距離も b に等しい（図6.3）．そ

の直線と z 軸がつくる角を**散乱角**という．散乱角 θ は p_0 と b の関数として決るものであり，逆に b を p_0 と θ の関数として書くこともできる．すなわち，

$$\theta=\theta(p_0, b) \qquad \text{または} \qquad b=b(p_0, \theta) \tag{6.65}$$

と書ける．力学の仕事はこの関係を理論的に導き出すことだ．

さて，先ほども述べたように，入射粒子ビームには，運動量はほとんど一定でも，初期位置（すなわち，衝突パラメーター）の違う多数の粒子が含まれている．散乱後 θ と $\theta+\Delta\theta$ の間の角度に出てくる粒子は，決って，式 (6.65) で与えられる b と $b+\Delta b$ の間の衝突パラメーターの値をもっていたはずである．したがって，入射方向に垂直な平面上の微小面積 $b\Delta b\Delta\phi$ を通過する粒子数は単位時間ごとに $\Delta N=N_0 b\Delta b\Delta\phi$ であるが（N_0 は上記のビーム強度），それらはすべて (θ, ϕ) 方向の立体角 $\Delta\omega=\sin\theta\,\Delta\theta\Delta\phi$ 内に散乱されて行くことになる．ただし，$n=1$ としてある．ゆえに，$\Delta\sigma=(\Delta N/N_0)=b\Delta b\Delta\phi=(b/\sin\theta)\,|\mathrm{d}b/\mathrm{d}\theta|\,\Delta\omega$ が成立し，微分断面積は，

$$\sigma(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{6.66}$$

によって与えられる．後でこれを相空間分布関数から導こう．

ラザフォード型散乱の場合（1 章問題参照），電荷 ze をもつ入射粒子と電荷 Ze をもつ原子核の間の静電力のポテンシャルは (Zze^2/r) であり（簡単のため $4\pi\varepsilon_0=1$ とおいた），衝突パラメーターと散乱角の関係が，

$$b(\theta)=\frac{\mu Z|z|e^2}{{p_0}^2}\cot\frac{\theta}{2} \tag{6.67}$$

となることがわかっている．μ は換算質量．ゆえに，微分断面積は，

$$\sigma(\theta)=\left(\frac{\mu Zze^2}{2{p_0}^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{6.68}$$

である．これを**ラザフォードの散乱公式**という．

これまでは散乱体を固定点として扱った．入射粒子に比べて

散乱体の質量が十分重い場合には，このような近似が許される．しかし，両者の質量が同程度のとき，散乱体も散乱によって反跳を受ける．このような問題は**重心系**とよばれる運動座標系に乗って観察する方がわかりやすい．重心が静止し全運動量がゼロであるような座標系を重心系という．これに対して，上記の座標系，すなわち，衝突前の散乱体が静止している座標系を**実験室系**という．実際の加速器による実験を念頭においての命名だろう．もっとも，最近は同程度のエネルギーをもつ2本のビームを正面衝突させる実験が行われているが，そこでは実験室がそのまま重心系になっている．

入射粒子a（質量m_a）と散乱体b（質量m_b）の弾性散乱を考えよう．両者間の力は距離$r=|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|$だけの関数であるポテンシャル$V(r)$をもつとする．1.2節その他で議論したように，重心座標$\boldsymbol{R}=(m_a\boldsymbol{r}_a+m_b\boldsymbol{r}_b)/(m_a+m_b)$と相対座標$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b$を使うと便利だ．この系のハミルトニアンは，

$$H=\frac{1}{2M}\boldsymbol{P}^2+\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{p}^2+V(r) \qquad (6.69)$$

のように変数分離されるからだ．$M=m_a+m_b$は全質量，$\mu=m_a m_b/M$は換算質量，$\boldsymbol{P}$は全運動量，$\boldsymbol{p}$は相対運動量である．等速直線運動をする重心運動が分離され，本質的な問題は質量μをもつ仮想的な質点の固定中心力$V(r)$による散乱に帰着してしまう．したがって，固定散乱体の場合に対する上記の議論がそのまま使える．しかし，変数の読み換えを行う必要がある．

実験室系での粒子aの初速度をv_0とすれば，初期運動量は$\boldsymbol{p}_a=(0,0,m_a v_0)$，$\boldsymbol{p}_b=(0,0,0)$であり，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_a$から重心の速度$v_c=m_a v_0/M$がわかる．ゆえに，実験室系から重心系へのガリレイ変換は$(x^*=x,\ y^*=y,\ z^*=z-v_c t)$である．今後重心系で見た量に＊を付けて表そう．速度変換$(v_x{}^*=v_x,\ v_y{}^*=v_y,\ v_z{}^*=v_z-v_c)$により重心系で見た初期運動量は$\boldsymbol{p}_a{}^*=(0,0,m_a(v_0-v_c))=(0,0,\mu v_0)$，$\boldsymbol{p}_b{}^*=(0,0,-m_b v_c)=(0,0,-\mu v_0)$で

あることがわかる．すなわち，$\boldsymbol{p}_a^* + \boldsymbol{p}_b^* = 0$．さて，衝突によって，運動量が$(\boldsymbol{p}_a \to \boldsymbol{p}_a',\ \boldsymbol{p}_b \to \boldsymbol{p}_b')$，$(\boldsymbol{p}_a^* \to \boldsymbol{p}_a^{*\prime},\ \boldsymbol{p}_b^* \to \boldsymbol{p}_b^{*\prime})$のように変化したとしよう．$\boldsymbol{p}_a$と$\boldsymbol{p}_a'$の角$\theta$および$\boldsymbol{p}_a^*$と$\boldsymbol{p}_a^{*\prime}$の角$\theta^*$がそれぞれ実験室系と重心系で見た散乱角である(図6.4を見よ)．相対座標はガリレイ変換に対しては不

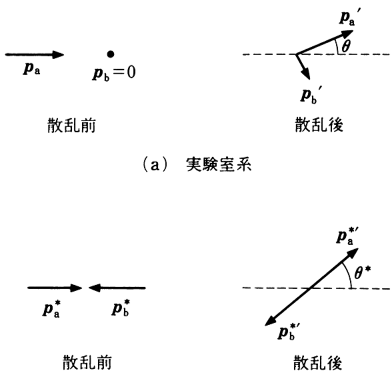


図6.4　散乱による運動量の変化

変だから，相対速度$\dot{\boldsymbol{r}}$と相対運動量$\boldsymbol{p} = \mu\dot{\boldsymbol{r}}$も不変である．一方，$\boldsymbol{p} = (m_b\,\boldsymbol{p}_a^* - m_a\,\boldsymbol{p}_b^*)/M$であり(式(1.14)を見よ)，これに$\boldsymbol{p}_b^* = -\boldsymbol{p}_a^*$を入れれば，

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_a^* \tag{6.70}$$

が得られる．衝突によって$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}'$，$\boldsymbol{p}_a^* \to \boldsymbol{p}_a^{*\prime}$と変化するが，式(6.70)すなわち関係式$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_a^{*\prime}$は同じように成立する．これは相対運動を代表する質量μの仮想質点の$V(r)$による散乱が重心系における粒子aの散乱そのものであることを意味している．したがって，上記の散乱角や微分断面積はおき換え$\theta \to \theta^*$，$\sigma(\theta) \to \sigma^*(\theta^*)$によって重心系における散乱角や断面積を与える．簡単な計算により，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta^*}{\cos\theta^*+(m_a/m_b)}$$

または $$\cos\theta=\frac{\cos\theta^*+(m_a/m_b)}{\sqrt{1+2(m_a/m_b)\cos\theta^*+(m_a/m_b)^2}} \qquad (6.71)$$

が得られるが，これを $\sigma(\theta)2\pi\sin\theta\,\Delta\theta=\sigma^*(\theta^*)2\pi\sin\theta^*\,\Delta\theta^*$ に代入すれば，変換式，

$$\sigma(\theta)=\sigma^*(\theta^*)\frac{[1+2(m_a/m_b)\cos\theta^*+(m_a/m_b)^2]^{3/2}}{1+(m_a/m_b)\cos\theta^*} \qquad (6.72)$$

が出てくる．要するに，固定ポテンシャルによる相対運動散乱問題を解けば，それは重心系の解であるが，式 (6.71) と式 (6.72) によって変換すれば実験室系の断面積が得られるというわけである．

さて，重心運動を分離して，相対座標だけの分布関数 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ が満足するリウビルの方程式は，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}}{\mu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}=0 \qquad (6.73)$$

である．$\boldsymbol{r}$ は相対座標，$\boldsymbol{p}$ は相対運動量だ．運動量 $\boldsymbol{p}_0=(0, 0, p_0)$ の入射粒子ビーム内の粒子分布は自由粒子 ($V=0$) の解である相空間分布関数，

$$f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)=\phi(x, y, z-(p_0/\mu)(t-t_0))\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0) \qquad (6.74)$$

によって表される．初期時刻 t_0 のときの空間的分布を表す $\phi(x, y, z)$ は z が負の大きな値のところだけでゼロでない値をもつ関数である．x，y についての分布は，衝突パラメーターのいろいろな値に対応して，ビームの断面上での粒子分布を記述するものだ．両方とも粒子が存在可能な領域で一定であり，その外ではゼロになるような関数だ．分布関数 f を適当に規格化しておけば，

$$J_0(\boldsymbol{r}, t)=\int\frac{\boldsymbol{p}}{\mu}f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{p}_0}{\mu}\phi(x, y, z-\frac{p_0}{\mu}(t-t_0))$$

$$(6.75)$$

は入射ビームの粒子流密度となり，単位時間内に (x, y) 平面上の単位面積を通って z 方向に流入する粒子数，

$$N_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_0}{\mu}\phi\left(x, y, z-\frac{p_0}{\mu}(t-t_0)\right)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(0, 0, z)\mathrm{d}z \tag{6.76}$$

を与える．ただし，(x, y) 依存性についてはビームの広がりの中心値で代用した．式 (6.76) が f_0 の規格化条件である．

このように規格化した $f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ を初期分布とする式 (6.73) の解 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ がわかったとしよう．f の中には素通りの部分 f_0 が入っているので，散乱された粒子の分布は，

$$f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)=f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)-f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \tag{6.77}$$

である．したがって，散乱後の単位時間内に粒子が $\boldsymbol{p}$ を含む体積 $\Delta^3\boldsymbol{p}$ の微小領域の中の運動量をもって見つかる全粒子数は，

$$F_s(\boldsymbol{p})\Delta^3\boldsymbol{p}\,; \qquad F_s(\boldsymbol{p})\equiv\lim_{t\to\infty}\int f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{6.78}$$

に等しい．ゆえに，$\boldsymbol{p}$ の方向を (θ, ϕ) とし，そのまわりの微小立体角を $\Delta\omega$ とすれば，$\Delta^3\boldsymbol{p}=p^2\Delta p\Delta\omega$ だから，単位時間内にその立体角中に散乱される全粒子数は，

$$\Delta N_s(\theta, \phi)=\Delta\omega\int_0^{\infty}F_s(\boldsymbol{p})p^2\mathrm{d}p \tag{6.79}$$

であり，散乱断面積は，

$$\sigma(\theta, \phi)=\frac{\displaystyle\int_0^{\infty}F_s(\boldsymbol{p})p^2\mathrm{d}p}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(0, 0, z)\mathrm{d}z} \tag{6.80}$$

となる．これが相空間分布関数で書いた散乱断面積の公式だ．

具体的な計算のためには，6.2 節で説明した積分核を使うとよい．$V\neq0$ の場合と自由粒子 $(V=0)$ の場合の積分核をそれぞれ K および K_0 と書けば，

$$F_s(\boldsymbol{p})=\lim_{t\to\infty}\iint[K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t\mid\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0,t_0)\\ -K_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t\mid\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0,t_0)]\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{6.81}$$

である．$V=0$ の場所では $K=K_0$ だから，右辺の積分は $V\neq 0$ の領域だけでとればよい．そこでは $K\neq K_0$ である．また，散乱を見るのだから $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}_0$ としてよい．このとき，$K_0=0$ とおくことができる．したがって，

$$F_s(\boldsymbol{p})=\iint\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0))\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0))\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\ =\int\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0))\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{6.82}$$

ただし，$\boldsymbol{r}_s$ と $\boldsymbol{p}_s$ は初期値 $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0)$ をもって始まる運動の十分時間が経過したときの位置と運動量である．

式 (6.82) の積分を実行することはそれほど面倒ではない．まず，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}_s$ の方向をそれぞれ (θ,ϕ)，(θ_s,ϕ_s) とすれば，$\boldsymbol{p}=p(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$，$\boldsymbol{p}_s=p_0(\sin\theta_s\cos\phi_s,\sin\theta_s\sin\phi_s,\cos\theta_s)$ と書くことができる．中心力場の場合に話を限ろう．このときは円筒座標を使って $\boldsymbol{r}'$ を表すとよい．$b'=\sqrt{x'^2+y'^2}$, $z'=z'$, $\phi'=\tan^{-1}(y'/x')$．ゆえに，$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}\phi'$．中心力なので，$\theta_s$ は b' だけの関数となり，$\phi_s=\phi'$ とおくことができる．また，$\boldsymbol{p}_s$ の方向は b' だけで決り，z' に関係しない．積分 (6.82) をビームの広がりの中だけで考えてよいので，$\phi(\boldsymbol{r})$ は $\phi(0,0,z)$ でおき換えられる．したがって，式 (6.82) で z' が関係するのは ϕ だけとなる．こうして，式 (6.82) は，

$$F_s(\boldsymbol{p})=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\phi(0,0,z')\mathrm{d}z'\right)\int_0^{\infty}b'\,\mathrm{d}b'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0)) \tag{6.83}$$

となり，微分断面積の式，

$$\sigma(\theta,\phi)=\int_0^{\infty}p^2\,\mathrm{d}p\int_0^{\infty}b'\,\mathrm{d}b'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}_0)) \tag{6.84}$$

を与える．積分変数を (p, b', ϕ') から $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}_0)$，すなわち，

$$P_x=p\sin\theta\cos\phi-p_0\sin\theta_s(b')\cos\phi'$$
$$P_y=p\sin\theta\sin\phi-p_0\sin\theta_s(b')\sin\phi'$$
$$P_z=p\cos\theta-p_0\cos\theta_s(b')$$

に変更すれば，デルタ関数の性質によって，ただちに，

$$\sigma(\theta, \phi)=\left|\frac{p^2 b'}{\partial(P_x, P_y, P_z)/\partial(p, b', \phi')}\right|_{P=0} \tag{6.85}$$

が得られる．変数変換ヤコビアンの $\boldsymbol{P}=0$ での値を求めればよいことになった．$\boldsymbol{P}=0$ の解は明らかに，$\phi=\phi'$，$\theta=\theta_s$，$p=p_0$ だ．これを用いて，ヤコビアンを計算すれば，

$$\left|\frac{\partial(P_x, P_y, P_z)}{\partial(p, b', \phi')}\right|_{P=0}=p_0{}^2\sin\theta\left|\frac{\mathrm{d}\theta_s(b')}{\mathrm{d}b'}\right|_{\theta_s=\theta} \tag{6.86}$$

となり，微分断面積の公式，

$$\sigma(\theta)=\frac{b'}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b'(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{6.87}$$

が導かれる．これは式 (6.66) にほかならない．

問　　題

6.1　演算子 $\hat{A}$ の指数関数 (6.32) による他の演算子 $\hat{B}$ の相似変換に対する級数展開，

$$\hat{B}(\lambda)\equiv e^{\lambda\hat{A}}\,\hat{B}\,e^{-\lambda\hat{H}}$$
$$=\hat{B}+\lambda[\hat{A}, \hat{B}]+\frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]+\frac{\lambda^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]]$$
$$+\cdots\cdot$$

を導け．$[\hat{A}, \hat{B}]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ は交換子である．

6.2　前問において，$\lambda=t$ および $\hat{A}=\hat{L}$ とおき，$\hat{B}=q$ または $\hat{B}=p$ と選べば，この級数は力学変数の時間的変化を直接与えるものだ．1次元問題に話を限り，(a) 質量 m の質点が加速度 g をも

つ一様な重力場中を自由落下する問題，すなわち，$F=-mg$ の場合，(b) 質量 m および角振動数 ω の調和振動子の問題，すなわち，$F=-m\omega^2 q$ の場合に，級数の各項を計算し $q(t)$ と $p(t)$ の具体形を求めよ．リウビルの演算子 (6.10) と q または p との交換子を式 (6.11) によって計算すればよい．

6.3 $\hat{D}\equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}q$ として次式を証明せよ．

$$e^{a\hat{D}}f(q)=f(q+a), \qquad e^{a\hat{D}}qe^{-a\hat{D}}=q+a,$$
$$e^{a\hat{D}}F(q)e^{-a\hat{D}}=F(q+a), \qquad e^{-ax}\hat{D}e^{ax}=\hat{D}+a$$

この式によって，$\exp(a\hat{D})$ が変数 q を a だけずらせる**変位演算子**，$\exp(-ax)$ が演算子 $\hat{D}$ を a だけずらせる演算子であることがわかった．

6.4 リウビルの方程式 (6.17) の形式解 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=\exp[-t(\boldsymbol{p}/m)\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r})]\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ の指数演算子が，前問の公式から見て，変数 $\boldsymbol{r}$ を $-t(\boldsymbol{p}/m)$ だけずらす 3 次元変位演算子であることを説明し，式 (6.44) を導け．

6.5 3 次元ユークリッド空間の点を直角座標で表し $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ としたとき，この動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ をそれぞれ x, y, z 軸のまわりに角度 α,β,γ だけ回転させて $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$ とする回転演算子が，$\hat{R}_x=y\hat{D}_z-z\hat{D}_y$，$\hat{R}_y=z\hat{D}_x-x\hat{D}_z$，$\hat{R}_z=x\hat{D}_y-y\hat{D}_x$ をもつ指数演算子 $\exp(\alpha\hat{R}_x)$，$\exp(\beta\hat{R}_y)$，$\exp(\gamma\hat{R}_z)$ によって与えられることを証明せよ．例えば，$x'=\exp(\gamma\hat{R}_z)x\exp(-\gamma\hat{R}_z)=x\cos\gamma-y\sin\gamma$，$y'=\exp(\gamma\hat{R}_z)y\exp(-\gamma\hat{R}_z)=x\cos\gamma+y\cos\gamma$，$z'=\exp(\gamma\hat{R}_z)z\exp(-\gamma\hat{R}_z)=z$ を示せばよい．なお，回転生成子 $\hat{R}_x,\hat{R}_y,\hat{R}_z$ が交換関係 $[\hat{R}_x,\hat{R}_y]=-\hat{R}_z$，$[\hat{R}_y,\hat{R}_z]=-\hat{R}_x$，$[\hat{R}_z,\hat{R}_x]=-\hat{R}_y$ を満足することを証明せよ．さらに，$x=r\sin\theta\cos\phi$，$y=r\sin\theta\sin\phi$，$z=r\cos\theta$ によって球座標 (r,θ,ϕ) を導入したときは，$\hat{R}_z=\partial/\partial\phi$ となることを示せ．

6.6 質量 m，角振動数 ω の 1 次元調和振動子のリウビル方程式を $t=0$ での初期分布 $\phi(q,p)$ に対して解き，$f(q,p,t)=\phi(q\cos\omega t-(p/m\omega)\sin\omega t,\ p\cos\omega t+m\omega q\sin\omega t)$ となることを示せ．

6.7 $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ の場合に，$\exp[\lambda(\hat{A}+\hat{B})]$ を因数分解して因子 $\exp(\lambda\hat{A})$ を分離する方法を考えよ．もちろん，$\exp[\lambda(\hat{A}+\hat{B})] = \exp(\lambda\hat{A})\exp(\lambda\hat{B})$ ではない．$\exp[\lambda(\hat{A}+\hat{B})] = \exp(\lambda\hat{A})\,\hat{U}_{\mathrm{I}}(\lambda)$ とおいて $\hat{U}_{\mathrm{I}}(\lambda)$ を求める問題だ．しかし，この問題はすでに本文中で解決済みだ．式 (6.47) で，$t \to -\lambda$，$\hat{L}_0 \to \hat{A}$，$\hat{L}' \to \hat{B}$ とおけば，$\hat{U}_{\mathrm{I}}(t)$ を求める方法はそのままこの $\hat{U}_{\mathrm{I}}(\lambda)$ にも適用できる．式 (6.51) がその解答である．

7 正準理論と拘束条件

2章2.2節ではルジャンドル変換を行ってラグランジュの立場からハミルトンの立場に移行し，ハミルトン形式の正準理論をつくった．その際重要な仮定をしている．一般座標 q_k に正準共役な一般運動量 p_k の定義式 (2.45) ($p_k=\partial L/\partial \dot{q}_k$) が $\dot{q}_k$ について解けて，すべての一般速度 $\dot{q}_k$ を (q, p) の関数として表せるという仮定である．これは系のラグランジアンが式(2.47)を満足するときに実現する．では，この条件が成立しないときはどうしたらよいか？　つまり，系のラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ の2階導関数がつくる n 行 n 列の行列 $(\partial^2 L/\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k)$ が特異的であって逆行列をもたない場合，すなわち，

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right)=0 \tag{7.1}$$

の場合に正準理論を構成することができるだろうか，という問題がある．すでに述べたように，正準理論は量子力学へのジャンプ台であった．正準理論ができなければ，力学系を“正準”量子化することは不可能だ．重力場を含むゲージ場の量子論はまさにこのような場合での量子化を要求する．そこにこの問題の現代的な意義がある．式(7.1)が成立する場合，ラグランジアンは**特異的**であるという．特異ラグランジアンに対して正準

理論をつくる方法はディラック（P. A. M. Dirac）によって開拓された．ここではその概略を説明する．

7.1　拘束条件の導出

式(7.1)が成立する場合，行列$(\partial^2 L/\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_k)$の階数は$n$ではなく$(n-K_1)$のように減っている$(0<n-K_1<n)$．このとき，式（2.45）によって定義された一般運動量$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$は互いに独立ではなく，その中の$K_1$個は他の一般運動量と一般座標$q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$の関数となる．これは互いに独立な$K_1$個の関係式，

$$\phi_a^{(1)}(q, p, t)=0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K_1) \tag{7.2}$$

が変数(q, p)に対する拘束条件として存在することを意味する．すなわち，特異ラグランジアンは相空間における拘束条件(7.2)を内蔵していたのである．このような一般運動量の定義式(2.45)から直接出てくる拘束条件を**1次拘束**という．これからは拘束条件と拘束条件を与える関数（式(7.2)の$\phi_a^{(1)}$）を簡単に**拘束**とよぶことがある．

1.5節では，式(1.84)のように座標変数だけの拘束条件を議論した．配位空間内で設定された拘束条件である．これは変数（q, p）を同列に扱うハミルトンの立場から見れば不満足であり，相空間内で(q, p)の関数として書いた拘束条件を扱いたい．一般運動量の定義式と一緒にして考えれば，相空間における拘束条件の背後には特異ラグランジアンの存在がある．

さて，拘束条件(7.2)があるため，相空間における代表点の運動は（$2n-K_1$）次元の部分空間Ω_1内に制限される．今後，Ω_1で成立する等式を≈と書くことにしよう．したがって，式(7.2)は，

$$\phi_a^{(1)}(q, p, t)\approx 0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K_1) \tag{7.3}$$

と書かなければならない．ディラックはこれを**弱い等式**とよんで，全相空間で成立する**強い等式**と区別した．この区別の必要

性はすぐ後でわかる.

拘束条件(7.3)は任意の時間に対して成立しなければならないので,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_a^{(1)} \approx 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi_a^{(1)} \approx 0\,, \qquad \cdots\cdot \tag{7.4}$$

が要求される. これを**無矛盾性の条件**という. 運動による力学量の変動の時間微分は, 正準理論では, ハミルトニアンとのポアッソンかっこ式によって与えられる. そのポアッソンかっこ式は変数(q, p)による微分を含む. (q, p)による微分は相空間内で2点間の関数値の差をつくり, その極限をとって計算される. 一方の点がΩ_1内にあっても, 他方がΩ_1外にある場合もある. したがって, 一般に$\phi^{(1)}{}_a \approx 0$でもそれを含むポアッソンかっこ式が≈ 0であるとは限らない. これが$\approx$と$=$とを区別する理由である.

この理由は同時に式(7.4)が自動的に成立するものではないことを教えてくれる. したがって, 自動的に成立しない場合の式(7.4)を新しい拘束条件として導入しなければならない. これを**2次拘束**という. すなわち, $\mathrm{d}\phi_a^{(1)}/\mathrm{d}t \approx 0$が自動的に成り立たず, しかも$\phi_a^{(1)} \approx 0$に帰着できない部分を含む場合, その部分を$\phi_b^{(2)}$とおいて新しく$\phi_b^{(2)} \approx 0$を要求するのである. さらに, $\mathrm{d}\phi_b^{(2)}/\mathrm{d}t \approx 0$が自動的に成立しないか, $\phi_a^{(1)} \approx 0$または$\phi_b^{(2)} \approx 0$に帰着できない部分を含む場合, その部分を$\phi_c^{(3)}$とおき次の拘束条件$\phi_c^{(3)} \approx 0$を設定する. これを繰り返して2次拘束$\phi_b^{(2)}$, $\phi_c^{(3)}$, $\cdots\cdot$が生れる. 自由度が有限である限りこの手続きはどこかで終り, $\phi_a^{(1)}$の任意階の時間微分は自動的にゼロになるか, すでに導入した1次または2次の拘束に帰着させてゼロとすることができる.

この手続きで2次拘束を設定するには, 前段階の拘束関数とハミルトニアンとのポアッソンかっこ式によって時間微分を計算しなければならない. しかし, そのハミルトニアンはまだ定義していない. ここでは, まず式(2.43)と同じ式,

$$H(q, p, t)=\sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t) \tag{7.5}$$

から出発しよう．ハミルトニアンの原始定義だが，後で拘束条件を取り入れて修正する．この H の変数依存性を調べるため，$(q_k, \dot{q}_k)$ を微小量 $(\delta q_k, \delta\dot{q}_k)$ だけ変化させ（p_k の定義式(2.45)を用いて），H の変分を計算すれば，

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{q}_k\delta p_k + p_k\delta\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{q}_k\delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k\right)\end{aligned} \tag{7.6}$$

となる．式(7.6)は，特異ラグランジアンの場合でも，ハミルトニアン(7.5)が (q, p) だけの関数であることを示している．したがって，

$$\delta H = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right) \tag{7.7}$$

と書くことができる．

しかし，式(7.6)の $(\delta q_k, \delta p_k)$ は独立ではなく，拘束条件(7.2)による制限，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_k}\delta p_k\right) = 0 \qquad (a=1, 2, \cdots, K_1) \tag{7.8}$$

を受ける．ここでも1.5節で用いたラグランジュの未定乗数法は有力な手段である．すなわち，ラグランジュの未定乗数 $-u_a (a=1, 2, \cdots, K_1)$ を式(7.8)に掛けて a についての和をとり式(7.6)に加えれば，

$$\begin{aligned}\delta H = \sum_{k=1}^{n}\Biggl\{&\left(\dot{q}_k - \sum_{a=1}^{K_1} u_a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_k}\right)\delta p_k\\ &+\left(-\frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{a=1}^{K_1} u_a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q_k}\right)\delta q_k\Biggr\}\end{aligned} \tag{7.9}$$

となるが，式(7.7)に等置して δq_k と δp_k の係数をゼロとおけば，

$$\dot{q}_k - \sum_{a=1}^{K_1} u_a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{a=1}^{K_1} u_a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{7.10}$$

が得られる．式(7.10)が成立するように K_1 個の未定乗数 u_a を選べるからだ．これとラグランジュの方程式，

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{7.11}$$

を組み合せれば，ただちに，

$$\dot{q}_p = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \sum_{a=1}^{K_1} u_a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_k}$$
$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} - \sum_{a=1}^{K_1} u_a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q_k} \tag{7.12}$$

となる．これがいまの場合のハミルトンの正準方程式だ．

ホロノーム型拘束条件（1.84）の場合と比較しておこう．2.1.2項で議論したように，ラグランジアンを $L'=L+\sum_a \lambda_a C_a$ と拡張して正準理論をつくることができた．対応するハミルトニアンは $H'=H-\sum_a \lambda_a G_a$ であるが，いまの場合との対応は，$G_a \to \phi_a^{(1)}$，$\lambda_a \to -u_a$ である．G_a が q だけの関数のため式(7.12)第1式右辺第2項に相当するものはない．

式(7.12)があれば，任意の力学量の運動方程式を求めることができる．力学量を $F(q, p, t)$ として，t について全微分し式(7.12)を用いれば，ただちに，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} + \sum_{a=1}^{K_1} u_a \{F, \phi^{(1)}{}_a\} \tag{7.13}$$

が得られる．{ , } はポアッソンかっこ式だ（定義は式(2.67)を見よ）．先ほども述べたように，$\phi_a^{(1)} \approx 0$ だからといって，$\{F, \phi_a^{(1)}\} \approx 0$ は成立しない．

式(7.13)の右辺第3項をハミルトニアンに吸収させるため，

$\sum_a\{F, u_a\}\phi_a^{(1)}$ を加えておこう．この項は式（7.3）によって ≈ 0 であるが，実際の運動はいつも $\phi_a^{(1)}\approx 0$ を保つように行われるので，この項を加えても運動方程式の解は変らない．したがって，等号＝を変えないままで式(7.13)を，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F, \bar{H}\} \tag{7.14}$$

のように書き直すことができる．ただし，

$$\bar{H}\equiv H+\sum_{a=1}^{K_1}u_a\phi_a^{(1)} \tag{7.15}$$

とおいた．これが拘束条件によって修正されたハミルトニアンである．式(7.13)と式(7.14)の同等性は $\{F, u_a\phi_a^{(1)}\}=\{F, u_a\}\phi_a^{(1)}+u_a\{F, \phi_a^{(1)}\}\approx u_a\{F, \phi_a^{(1)}\}$ によって保証される．ただし，未知の量 u_{a} に対しても，ポアッソンかっこ式の恒等式(2.70e)が成立するものとした．これは後で与えられる u の決め方によって正当化される．順序が逆になったが，拘束運動を支配するハミルトニアンとして，はじめに式(7.15)を与えて出発することもできる．いずれにしても，$\bar{H}$ の構成によって，ラグランジュ変数からのルジャンドル変換 $(q, \dot{q})\to(q, p, u)$ が完成したのである．ハミルトンの立場の変数は (q, p, u) であり，u を加えることが必要だった．その意味でこれらの変数を**ハミルトン変数**という．

時間微分を与えるハミルトニアン $\bar{H}$ がわかったので，無矛盾性の条件(7.4)から2次拘束を導く作業に取りかかろう．式(7.14)によれば，時間微分は $\bar{H}$ とのポアッソンかっこ式をとることによって与えられる．簡単のため $\partial\phi_a^{(1)}/\partial t=0$ であるとしておく．まず，

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a^{(1)}&=\{\phi_a^{(1)}, \bar{H}\}\\ &\approx\{\phi_a^{(1)}, H\}+\sum_{a'=1}^{K_1}u_{a'}\{\phi_a^{(1)}, \phi_{a'}^{(1)}\}\\ &\approx 0\end{aligned} \tag{7.16}$$

でなければならない．第2行が恒等的にゼロであるか，$\sum_{a'} C_{aa'}\phi_{a'}^{(1)}$ の形になっていたとすれば式(7.16)が成立し，2階微分も $\ddot{\phi}_a^{(1)}=\sum_{a'} C_{aa'}\{\phi_{a'}^{(1)},\ \bar{H}\}=\sum_{a'}\sum_{a''} C_{aa'}C_{a'a''}\phi_{a''}^{(1)}\approx 0$ となって無矛盾性の条件は自動的に満足される（係数 $C_{aa'}$ は特異的でなければ(q,p)の関数であってもよい）．以下同様．この場合はこれで終りだ．しかし，第2行が $\phi_a^{(1)}$ の線形結合にならない部分があるときは，それを $\phi_b^{(2)}$ とおいて新しい拘束条件 $\phi_b^{(2)}\approx 0$ を設定しなければならない．これが2次拘束だ．$\phi_b^{(2)}$ の数 K_2 はラグランジアンによって違うが，一般に $K_2\neq K_1$ であり，$K_1+K_2<n$．$\phi_b^{(2)}\approx 0$ が u を含む場合，これは u を決定する条件式となる．この条件式ですべての u が決ってしまえば，高階微分の無矛盾性条件も自動的に成立し，話は終る．

しかし，u を決められない部分に対しては，さらに，

$$\dot{\phi}_b^{(2)}\approx\{\phi_b^{(2)}, H\}+\sum_{a=1}^{K_1}u_a\{\phi_b^{(2)}, \phi_a^{(1)}\}\approx 0 \tag{7.17}$$

を要求しなければならない．進め方は前の場合と同じだ．すなわち，右辺が $\phi_a^{(1)}$ と $\phi_b^{(2)}$ の線形結合にならない部分をもつか，式(7.17)が u を決める条件にならないときは，式(7.17)自身または適当な部分を $\phi_c^{(3)}$ とおいて，新しい拘束条件 $\phi_c^{(3)}\approx 0$ を設定する必要がある．この拘束の数を K_3 としよう．以下はこの繰り返しだ．このようにして，新しく$(K_2+K_3+\cdots\cdot)$個の2次拘束が付加される．結局，1次拘束と一緒にして $K(\equiv K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot)$ 個の拘束条件 $\phi_a^{(1)}\approx 0$，　$\phi_b^{(2)}\approx 0$，$\phi_c^{(3)}\approx 0,\cdots\cdot$ が特異ラグランジアンから導き出されたわけだ．

拘束条件設定の出発点となった式(7.3)の関数 $\phi_a^{(1)}$ の選び方はただ一通りとは限らない．$\phi\approx 0$ が成立するとき，ϕ を例えば $\Phi=\phi^2$ または $\Phi=\sqrt{\phi}$ に取り替えて，$\Phi\approx 0$ とおいてもよい場合があるからである．しかし，2次拘束は1次拘束とハミルトニアンとのポアッソンかっこ式をとることから生れるので，変数(q,p)による微分が可能でなければならない．この要求の範囲内での任意性があるということだ．なお，$\phi\approx 0$ のと

き ϕ^2 の微分は(ϕ の微分が ≈ 0 でなくても）常に ≈ 0 となるので，$\phi^2=0$，$\phi^3=0$，・・・・とおいてよい．ゆえに，ϕ の任意関数は ϕ の線形結合として書くことができる．

7.2　簡単なモデルの拘束条件

一般論ではわかりにくいので，具体的なモデルで拘束条件が出てくるありさまを見よう．そもそも，特異ラグランジアンが拘束条件を生み出す原因は，力学系の真の自由度よりも多くの数の変数を導入して出発したからである．重力場などのゲージ場は変数変換に対する形不変性を明示するため，多くの成分を入れなければならなかった．ディラックの理論はこの問題の処理を目標にして工夫されたものだ．しかし，その問題はこの本の守備範囲を越える．ここでは玩具のような簡単なモデルで我慢していただこう．

簡単といっても1次元モデルは無意味だ．2次元モデルでも2変数の間の結合がなければ，独立な2個の1次元モデルに分解されるから，やはり意味はない．意味のある最も簡単なモデルは，2次元座標変数 (x, y) をもつラグランジアン，

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F(x)\dot{y} \tag{7.18}$$

または，

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2+G(x)y \tag{7.19}$$

の場合だろう．$F(x)$ と $G(x)$ は x の非線形関数である．

式(7.18)に対しては，$p_x=\dot{x}$，$p_y=F(x)$ となるので p_y は独立ではなく，L は明らかに特異的である．この場合の1次拘束は $\phi^{(1)}\equiv p_y-F(x)$ であり，ハミルトニアン(7.15)は，

$$\bar{H}=\frac{1}{2}p_x{}^2+u(p_y-F(x)) \tag{7.20}$$

となる．これから2次拘束をつくれば，$\dot{\phi}^{(1)}=\{p_y-F,\bar{H}\}=-F'p_x\equiv-\phi^{(2)}$, $\dot{\phi}^{(2)}=\{F'p_x,\bar{H}\}=F''p_x{}^2+u(F')^2\equiv\phi^{(3)}$ となり，$\phi^{(3)}\approx 0$ から $u=-F''p_x{}^2/(F')^2$ が決定される．これで無矛盾性の条件は完結した．ただし，$F'(x)\neq 0$ である．

式 (7.19) の場合は $p_x=\dot{x}$，$p_y=0$ だから，1次拘束は $\phi^{(1)}\equiv p_y$ であり，ハミルトニアンは，

$$\bar{H}=\frac{1}{2}p_x{}^2-G(x)y+up_y \tag{7.21}$$

となる．これから，$\dot{\phi}^{(1)}=\{p_y,\ \bar{H}\}=G\equiv\phi^{(2)}$, $\dot{\phi}^{(2)}=\{G,\ \bar{H}\}=G'p_x\equiv\phi^{(3)}$, $\dot{\phi}^{(3)}=\{G'p_x,\ \bar{H}\}=G''p_x{}^2+(G')^2y\equiv\phi^{(4)}$, $\dot{\phi}^{(4)}=\{G''p_x{}^2+(G')^2y,\ \bar{H}\}=G'''p_x{}^3+4G''G'p_xy+u(G')^2\equiv\phi^{(5)}$ の2次拘束が出てくる．初めて u が顔を出したので $\phi^{(5)}\approx 0$ とおけば，$u=-(G'''p_x{}^3+4G''G'p_xy)/(G')^2$ が決る．ただし，$G'(x)\neq 0$．これで無矛盾性条件が完結した．しかし，例外がある．$G(x)=x^2$ の場合だ．$\phi^{(4)}$ の中の $(G')^{(2)}y=4\phi^{(2)}y$ は $\phi^{(2)}\approx 0$ のため捨ててよい．ゆえに，$\phi^{(4)}\equiv p_x{}^2$ とおくことができるので，$\dot{\phi}^{(4)}=\{p_x{}^2,\bar{H}\}=4(xp_x)y=2\phi^{(3)}y\approx 0$ となって無矛盾性条件が完結する．この場合，u は決らず不定のまま残る．

もう少し現実的な場合として，ホロノーム型拘束条件 (1.84) を考えよう．このとき，ラグランジアンは式 (2.33) のように拡張しておけばよいが，未定乗数 λ_a も力学変数として扱う必要がある．だが，ラグランジアンは $\dot{\lambda}_a$ を含まないので特異的である．その場合の簡単な例として，1.5節の冒頭で述べた単振子の運動と滑らかな斜面上の物体の運動を考えよう．この例題のラグランジアンは，

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy+\lambda G(x,y) \tag{7.22}$$

である．ただし，単振子も斜面上の物体も質点と見なし，図1.15のように座標系を設定してその位置を (x,y) で表した．関数 $G(x,y)$ は，

$$\text{単振子の場合：}\quad G(x,y)=x^2+y^2-r_0{}^2 \tag{7.23a}$$

斜面の場合：　　$G(x, y) = -x\sin\theta + y\cos\theta$　　(7.23b)

を一括したものだ．m は単振子または物体の質量，g は重力の加速度，r_0 は単振子の糸の長さ，θ は斜面と水平面のつくる角を表す．明らかに，$p_x = m\dot{x}$，$p_y = m\dot{y}$，$p_\lambda = 0$ だから，3行3列の行列 $(\partial^2 L/\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_k)$ の階数は2となる．したがって，1個の1次拘束 $\phi^{(1)} \equiv p_\lambda \approx 0$ を設定すればよい．ハミルトニアン(7.15)は，

$$\bar{H} = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2) + mgy - \lambda G(x, y) + up_\lambda \qquad (7.24)$$

となる．したがって，まず $\dot{\phi}^{(1)} = \{p_\lambda, \bar{H}\} = G(x, y) \equiv \phi^{(2)} \approx 0$ が要求されるが，これは式(1.84)にほかならない．この具体例に限らず，ホロノーム型拘束条件は2次拘束として現れる．次に，$\dot{\phi}^{(2)} = \{G, \bar{H}\} = (1/m)(G_x p_x + G_y p_y) \equiv (1/m)\phi^{(3)} \approx 0$ が要求される．ただし，G_x と G_y は関数 $G(x, y)$ の x と y による偏導関数である．ここからは単振子と斜面を分けて計算した方が便利だ．

単振子の場合，$\phi^{(3)} = 2(xp_x + yp_y)$ であり，$\dot{\phi}^{(3)} = \{\dot{\phi}^{(3)}, \bar{H}\} = (2/m)(p_x{}^2 + p_y{}^2) - 2mgy + 4\lambda\phi^{(1)} + 4\lambda r_0{}^2$ となるが $\phi^{(1)} \approx 0$ のため，$\phi^{(4)} \equiv (1/m)(p_x{}^2 + p_y{}^2) - mgy + 2\lambda r_0{}^2 \approx 0$ を要求すればよい．さらに，$\dot{\phi}^{(4)} = \{\phi^{(4)}, \bar{H}\} = -3gp_y + (2\lambda/m)\phi^{(3)} + 2r_0{}^2 u$ となるが，$\phi^{(3)} \approx 0$ のため，$\phi^{(5)} \equiv -3gp_y + 2r_0{}^2 u \approx 0$．これで $u = (3gp_y/2r_0{}^2)$ が決り，無矛盾性の条件が完結する．

斜面の場合，$\phi^{(3)} = -p_x\sin\theta + p_y\cos\theta$ であり，$\phi^{(3)} = \{\phi^{(3)}, \bar{H}\} = -mg\cos\theta + \lambda \equiv \phi^{(4)} \approx 0$，$\dot{\phi}^{(4)} = \{\phi^{(4)}, \bar{H}\} = u \equiv \phi^{(5)} \approx 0$ が要求される．最後の拘束条件で u が決定されて無矛盾性の条件が完結する．

7.3 拘束条件の分類とディラックかっこ式

すべての拘束条件に通し番号をつけて $\psi_m\,(m=1,2,\cdots\cdot,K)$ と書こう．便宜上，1次拘束を最初において $\psi_a=\phi^{(1)}{}_a(a=1,2,\cdots\cdot,K_1)$ とし，次に2次拘束を $\psi_b=\phi^{(2)}_{b-K_1}\,(b=K_1+1,\cdots\cdot,K_1+K_2)$，$\psi_c=\phi^{(2)}_{c-K_1-K_2}\,(c=K_1+K_2+1,\cdots\cdot,K_1+K_2+K_3),\cdots\cdot$ のように並べる．このように記号を整理すれば，上記の経過は K_1 個の1次拘束 $\psi_m(m=1,2,\cdots\cdot,K_1)$ を与えて $K-K_1$個の2次拘束，

$$\psi_m\approx 0\qquad(m=K_1+1,\cdots\cdot,K)\tag{7.25}$$

とたかだか K_1 個の u に対する条件式，

$$\{\psi_l,H\}+\sum_{m=1}^{K_1}u_m\{\psi_l,\psi_m\}\approx 0\tag{7.26}$$

を導出したわけである．ただし，式(7.26)では，それ自身が恒等式になる場合と他の拘束の線形結合になる部分を除いてある．

さて，式(7.26)を u について解くことを考えよう．これは $K_{lm}\equiv\{\psi_l,\psi_m\}\,(K_{lm}=-K_{ml})$ を係数とする線形非同次の代数方程式だ．数学的証明を省略して結論をいえば，u は K_{lm} と $\{\psi_l,H\}$ によって決められる K' 個の部分 $u_\alpha(\alpha=1,2,\cdots\cdot,K')$ と，不定のまま残される K_1-K' 個の部分 $u_\alpha(\alpha=K'+1,\cdots\cdot,K_1)$ とに分れる．これに対応して，ハミルトニアンも，

$$\overline{H}=H+\sum_{\alpha=1}^{K'}u_\alpha\psi_\alpha+\sum_{\alpha=K'+1}^{K_1}u_\alpha\psi_\alpha\tag{7.27}$$

のように，元の H と決定部分と不定部分とに分けられる．(u_α,ψ_α) と (u_m,ψ_m) とでは並べ方が違うことに注意してほしい．この証明は同時に弱い等式，

$$\{\psi_l,\psi_\alpha\}\approx 0\qquad(l=1,2,\cdots\cdot,K\,;\,\alpha=K'+1,\cdots\cdot,K_1)\tag{7.28}$$

の成立を保証してくれる．したがって，式(7.26)は，

$$\{\psi_l, H\}+\sum_{\alpha=1}^{K'}u_\alpha\{\psi_l, \psi_\alpha\}\approx 0 \tag{7.29}$$

となる．これが u を決める方程式である．なお，上記の不定部分は，適当な l の組に対する線形同次方程式，

$$\sum_{m=1}^{K_1}K_{lm}X_m=0 \tag{7.30}$$

が解けてすべてがゼロでない解 X_m が K_1-K' 組だけ存在する場合に現れるものだ．

ここで，力学量に対する重要な分類を導入しよう．力学量 F がすべての拘束に対して関係式，

$$\{F, \psi_l\}\approx 0 \qquad (l=1, 2, \cdots, K) \tag{7.31}$$

を満足するとき，F を**第1種の量**といい，それ以外を**第2種の量**という．第1種の量 ϕ によって与えられた拘束条件，

$$\phi\approx 0 \tag{7.32}$$

を**第1種の拘束条件**という．ϕ が第2種の量であれば，式(7.32)は**第2種の拘束条件**とよばれる．式 (7.28) によれば，$\psi_\alpha(\alpha=K'+1, \cdots, K_1)$ は第1種の量であり，$\psi_a(\alpha=1, 2, \cdots, K')$ とその線形結合は一般に第2種の量である．この分類に従えば，通常のホロノーム型の拘束条件は第2種だ．

ところで，この分類には注意が必要である．第2種の量を適当に組み合せて線形結合をつくると第1種の量になることがあるからだ．したがって，この手続きを拘束 ψ_a に適用して可能な限り最大限の第1種拘束をつくり，どうしても第1種にならない純粋な第2種拘束を分離しておくべきだろう．前者の第1種拘束を $\psi_\mu(\mu=1, 2, \cdots, K-D)$，後者の第2種拘束を $\chi_\nu(\nu=1,2,\cdots,D)$ と書くことにする． 純粋な第2種拘束の数を D とした（もちろん $K>D$）．χ_ν を**"純"第2種拘束**とよぼう．改めて，全拘束条件を書けば，

$$\psi_\mu\approx 0 \qquad (\mu=1, 2, \cdots, K-D) \tag{7.33a}$$

$$\chi_\nu\approx 0 \qquad (\nu=1, 2, \cdots, D) \tag{7.33b}$$

さて，"純"第2種拘束 χ_ν がつくる行列要素，

$$\varDelta_{\nu'\nu''}\equiv\{\chi_{\nu'}, \chi_{\nu''}\} \tag{7.34}$$

をもつ行列 $\varDelta$ には $\det\varDelta\neq0$ という性質がある．なぜならば，χ_ν のどのような線形結合も第1種になることはないからである．また，$\varDelta$ は反対称行列 ($\varDelta^{\mathrm{T}}=-\varDelta$) だから，$D$ は偶数に限る．もしも反対称行列の次元が奇数ならば，$\det\varDelta=0$ となってしまうからだ．

このように整理した拘束 ψ_μ と χ_ν を使ってハミルトニアン(7.27)を書き直せば

$$\bar{H}=H+\sum_{\mu=1}^{K-D}v_\mu\psi_\mu+\sum_{\nu=1}^{D}v'_\nu\chi_\nu \tag{7.35}$$

となる．途中経過でわかるように，v'_ν は決定済みだが，v_μ は不定のまま残されている．なお，式(7.27)には1次拘束しか入っていなかったが，第1種である限り，1次拘束には本質的な相違はないので，この式にはすべての第1種拘束を加えておいた．これは ψ_μ が生成するゲージ変換と関連して議論すべき話だが，深入りしている余裕はない．

ここで，2個の力学量 F と G に対する**ディラックかっこ式**を，

$$\{F, G\}_D\equiv\{F, G\}-\sum_{\nu'=1}^{D}\sum_{\nu''=1}^{D}\{F, \chi_{\nu'}\}(\varDelta^{-1})_{\nu'\nu''}\{\chi_{\nu''}, G\} \tag{7.36}$$

によって定義しよう．右辺の和はすべての“純”第2種拘束についてとる．ディラックかっこ式に対しても，ポアッソンかっこ式の場合とまったく同じ形の恒等式 (2.70) が成立する．証明は省略しよう．また，ディラックかっこ式はすべてポアッソンかっこ式によって定義されているので，正準変換に対して不変であり，変数の選び方に無関係である．

ディラックかっこ式の効用はいろいろあるが，まず，次の性質に注目したい．式(7.36)で $G=\chi_\nu$ とおけば，ただちに，

$$\begin{aligned}\{F, \chi_\nu\}_D&=\{F, \chi_\nu\}-\sum_{\nu'=1}^{D}\sum_{\nu''=1}^{D}\{F, \chi_{\nu'}\}(\varDelta^{-1})_{\nu'\nu''}\varDelta_{\nu''\nu}\\&=\{F, \chi_\nu\}-\{F, \chi_\nu\}=0\end{aligned} \tag{7.37}$$

が得られる．これは，ディラックかっこ式内では，“純”第2

種拘束をゼロとおいてよいことを示している．ポアッソンかっこ式を使う場合，弱い等式 $\chi_\nu \approx 0$ があっても強い等式 $\chi_\nu = 0$ が成り立つとは限らなかった．しかし，ディラックかっこ式を使う限り，“純”第2種拘束に対するこの区別は消滅するのである．

簡単のため，$\partial\chi_\nu/\partial t = 0$ としておこう．このとき，χ_ν に対する無矛盾性の条件は $\mathrm{d}\chi_\nu/\mathrm{d}t = \{\chi_\nu, \bar{H}\} \approx 0$ となるので，運動方程式(7.14)右辺のポアッソンかっこ式は，

$$\begin{aligned}\{F, \bar{H}\} &= \{F, \bar{H}\}_D + \sum_{\nu'}\sum_{\nu''}\{F, \chi_{\nu'}\}(\Delta^{-1})_{\nu'\nu''}\{\chi_{\nu''}, \bar{H}\} \\ &\approx \{F, \bar{H}\}_D \end{aligned} \tag{7.38}$$

によってディラックかっこ式におき換えることができる．すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, \bar{H}\}_D \tag{7.39}$$

が成立する．しかも，この $\bar{H}$ に対しては，式(7.37)のために，式(7.35)のうち χ_ν を含む最後の項を無視し，

$$\bar{H}_D \equiv H + \sum_{\mu=1}^{K-D} v_\mu \phi_\mu \tag{7.40}$$

を使ってよい．このように，ディラックかっこ式の導入によって，運動方程式から第2種の拘束条件を完全に消去することができるのである．

しかし，H_D は $K-D$ 個の不定量 v_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, K-D)$ をもっている．これは理論によって決めることのできない量であり，理論自体が本質的に内蔵している不定性に根ざしている．しかし，力学系の物理的状態はこの不定性に関係なく定まる．すなわち，物理的状態は ϕ_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, K-D)$ を生成演算子とする変換に対して不変である．この変換を一般に**ゲージ変換**という．また，この不定性をゲージの自由度という．3.3節で概観した電磁場の分析を思い出そう．電磁場は式(3.100)のように電磁ポテンシャル$(\boldsymbol{A}, \phi)$によって表せるので，見掛け4個の関数分の自由度があるように見えるが，その

中の1個分は不必要であった．それがゲージ変換(3.101)に対する不変性の内容である．上記のゲージ変換は電磁場の場合のゲージ変換の一般化と見ることができる．最近，物理学のいろいろな分野で各種のゲージ変換が議論されている．ディラックはこのような場合の量子化を，ポアッソンかっこ式ではなく，ディラックかっこ式をジャンプ台にして実行しようとしたのである．興味深い話だが，やはりこの本の守備範囲を越える問題である．将来そのような問題に直面したときに，改めて巻末に挙げた参考文献などで勉強していただきたい．

参　考　文　献

力学関係の教科書や参考書はたいそう多く，完全なリストをお見せすることはまず不可能だ．ここでは私が勉強したり参考にした本を中心に紹介しよう．

古くから有名な解析力学の教科書としては，

[1] E. T. Whittaker: A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies (Cambridge Univ. Press, 1917); 多田政忠，藪下信訳：「解析力学 上」(講談社，1977)，「同 下」(1979)，

がある．解析力学の決定版のようにいわれてきた本だが，大部すぎて教科書向きとはいえないし，やはり古い．しかし，古典的な解析はほとんど書いてあるので，必要に応じて百科辞典的な参考書として利用すると便利だ．このほかにあまり有名ではないが，

[2] L. A. Pars: A Treatise on Analytical Dynamics (Heineman, 1965)，

という大部の本もある．参考にはなるが，やはり通読には適さない．

教科書向きの本としては，まず，

[3] 山内恭彦：「一般力学」増訂第3版（岩波書店，1981），

をあげよう．わが国では広く読まれてきた標準的な教科書であり，第1版は1941年に出ている．やや古いスタイルながら，きっちりした理論構成とともに多数の具体的問題が丹念に解かれていて参考になる．読み通すにはかなりの努力が必要だ．もう少し新しい本としては，

[4] 伏見康治：「現代物理学を学ぶための古典力学」(岩波書店，1964)，

がある．ベクトル・ジアジクス記法を広範に取り入れて平易に書かれた特色のある教科書である。電磁流体への応用を念頭においた例題が見られる．最近出

版された本としては,

[5]　大貫義郎:「解析力学」(岩波書店, 1987),

がある. 解析力学の理論体系に焦点をしぼって書かれた参考書である. 初歩的な説明から始めてかなり程度の高いところまでもコンパクトにまとめている. いろいろな特色があるが, 特異ラグランジアンに対するディラック理論を詳しく説明している.

なお, 本書で十分説明できなかった拘束条件問題や特異ラグンジアンについては次の文献を参考にしていただきたい.

P. A. M. Dirac : Can. J. Math. **2** (1950) 129 ; P. A. M. Dirac : Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ. Press, 1964) ; A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim : Constrained Hamiltonian Systems (Academia Nazionale dei Lincei, 1974).

外国の教科書からは次の二つをあげておく.

[6]　H. Goldstein : Classical Mechanics, 2nd ed. (Addison-Wesley, 1980) ; 瀬川富士, 野間進訳:「古典力学 上, 下」(吉岡書店, 1983).

これは, 国際的に広く使われている教科書である. 一般的な理論体系ばかりでなく, 具体的な問題を数多く扱っている. 特殊相対性理論や連続体力学などの説明もあるためか, かなり分厚い教科書だ.

[7]　L. D. ランダウ-E. M. リフシッツ:「力学」増訂第3版 (東京図書, 1983).

これも国際的に有名な教科書である. 見掛け分量が少ないように見えるが, 変分原理から出発する理論構成やかなり多数の具体的問題を収めているため内容豊富だ. 決して容易に読み進むことのできる本ではない.

なお, 次の本は平易に書かれた入門的教科書である.

[8]　高橋康:「量子力学を学ぶための解析力学入門」(講談社, 1978).

[9]　小出昭一郎:「解析力学」(岩波書店, 1983).

本文ではデルタ関数についての解説が不十分だったかもしれない. 入門的な参考書として次の本を見ていただきたい.

沢田昭二:パリティ物理学コース「物理数学」(丸善, 1990),

並木美喜雄:「デルタ関数と微分方程式」(岩波書店, 1982).

後者では波動の伝搬・放射の問題が扱われている.

索　　引

あ　行

か　行

さ 行

た　行

[新装復刊] パリティ物理学コース 解析力学

平成27年5月30日 発 行

著作者 並 木 美喜雄

発行者 池 田 和 博

発行所 丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話(03)3512-3267／FAX(03)3512-3272
営業：電話(03)3512-3256／FAX(03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・製本／藤原印刷株式会社

ISBN 978-4-621-08723-7 C 3342 Printed in Japan